4 節点アイソパラメトリック要素を用いた平面弾性問題解析

2025.05.26

1. プログラムの概要

1）本プログラム isop4.exe は，4 節点アイソパラメトリック要素を用いた有限要素法（FEM）により平面弾性問題（平面応力または平面ひずみ）を解析するものである．ソルバーとしてスカイライン法とコレスキー法を用い，開発言語として VB2022 を用いている．

2）Gauss の積分点における応力を節点に外挿し，外挿した要素の数で平均化するという，通常の応力外挿法を用いて節点応力を計算している．

3）ユーザーはワードパッドなどのテキストエディターを用いるか，メッシュ生成アプリ isop4mesh.exe を用いて（こちらを推奨する），後に示す入力データを作成し，本プログラムはそのデータをファイルから読み込んで FEM を実行する．

4）本プログラムは，最大 30000 節点まで解析可能であり，数千節点の規模の問題であっても数秒で解を得ることができる．また，材料数も 30000 個を上限としており，ほぼ無制限と考えてよい．

5）解析結果は，テキストファイルで出力されるとともに，画面には解析対象の変位の様子や色づけされた応力が表示される．

6）画面に表示された変形図や応力図は，マウスの操作によって，Google Map のように自由に移動，拡大縮小が可能である．これにより，細部にわたって変位や応力を調べることができる．

7）最大変位や最大・最小応力はただちに読み取れるように画面に表示される．

8）マウスを節点の近くに移動すると，その節点の変位や応力の値が自動的にポップアップ表示される．

2. ユーザーが準備すべきデータ

1）例 1（たとえば，ファイル名を beam311.dat とする）

以下の図 1 のようなはりの曲げ問題の例を挙げてその準備手順を示す．（赤い破線は変形後の様子を示している）

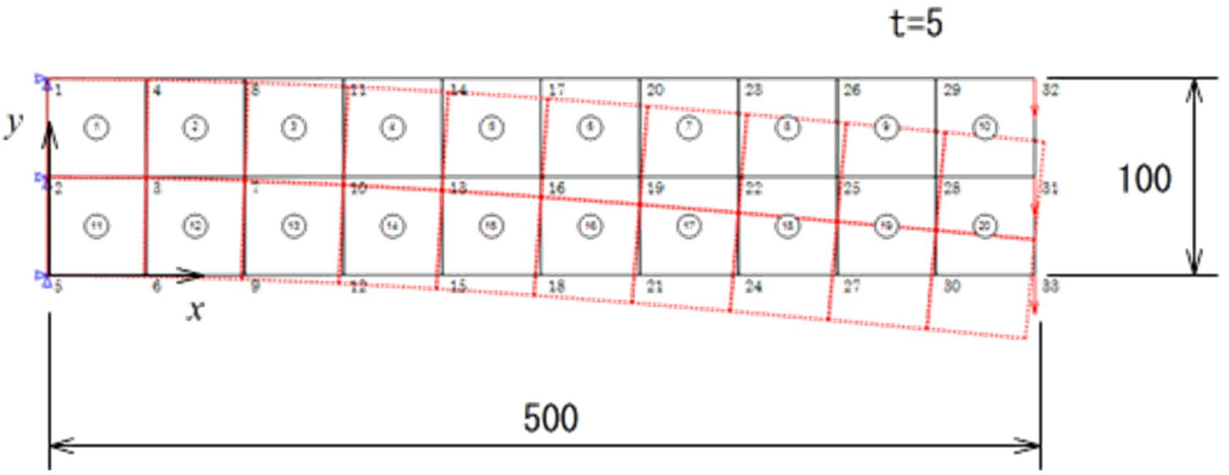


図 1　はりの曲げ(例 1)

はりの寸法は，長さ l=500mm，高さ h=100mm，厚さ t=5mm とし，左端を固定端，右端に垂直下方に荷重が作用するものとする．材料は，軟鋼を仮定し，縦弾性係数を E=206×10^9N/m^2=206×10^3N/mm^2，ポアソン比を ν =0.3 とする．

はじめに，はりの左端下側を原点とする xy 座標を設定する．次に，長さ 500mm×高さ 100mm の寸法のはりの領域を小さな 4 角形要素に分割する．図 1 は，y 方向に 2 分割，x 方向に 10 分割した場合を示している．有限要素法ではこの分割数が細かいほど高精度な解が得られるが，ここでは，説明の便宜のために粗い分割をしている．

分割によって得られる 4 角形は 4 つの頂点を有するが，これらを**節点**（node）といい，この節点に 1 からはじまる番号付けをする．図 1 の場合には，左端の上側を節点 1 とし，合計 33 個の節点に番号付けをしている．このとき，なるべく 1 つの 4 角形が有する 4 頂点の番号差が小さくなるように番号付けすると何かと都合が良い．

さらに，それぞれの 4 角形に対して，**要素**（element）番号を付する．節点番号同様，1 から始めて，図 1 では 20 個の 4 角形要素に番号をつけている．有限要素法では，節点番号と区別するために要素番号を①のように○囲み数字で表す習慣がある．これより，各節点の x,y 座標は，節点番号順に並べると

1	, 0e+00	, 1e+02
2	, 0e+00	, 5e+01
3	, 5e+01	, 5e+01
4	, 5e+01	, 1e+02
5	, 0e+00	, 0e+00
6	, 5e+01	, 0e+00
7	, 1e+02	, 5e+01
8	, 1e+02	, 1e+02
9	, 1e+02	, 0e+00
10	, 1.5e+02	, 5e+01
11	, 1.5e+02	, 1e+02
12	, 1.5e+02	, 0e+00
13	, 2e+02	, 5e+01
14	, 2e+02	, 1e+02
15	, 2e+02	, 0e+00
16	, 2.5e+02	, 5e+01
17	, 2.5e+02	, 1e+02
18	, 2.5e+02	, 0e+00
19	, 3e+02	, 5e+01
20	, 3e+02	, 1e+02
21	, 3e+02	, 0e+00
22	, 3.5e+02	, 5e+01
23	, 3.5e+02	, 1e+02
24	, 3.5e+02	, 0e+00
25	, 4e+02	, 5e+01
26	, 4e+02	, 1e+02
27	, 4e+02	, 0e+00
28	, 4.5e+02	, 5e+01
29	, 4.5e+02	, 1e+02
30	, 4.5e+02	, 0e+00
31	, 5e+02	, 5e+01
32	, 5e+02	, 1e+02
33	, 5e+02	, 0e+00

となる．このとき，データを区切るためにデータの間にコンマを入れる．また，節点番号は整数，x, y 座標は実数（小数点つきの数値）で記述し，数字，コンマおよび空白などはすべて半角とする．

つぎに，**要素**（element）**データ**を作成する．図 1 では全要素数は 20 個なので，各要素に番号を 1 から 20 まで割り当て（番号のつけ方は任意だが，規則性を与えて番号付けをするとよい），その要素を反時計回りに囲む 4 個の節点番号をメモする．また，各要素の縦弾性係数 E（節点座標にミリメートル mm の単位を用いたのであれば，縦弾性係数は N/mm^2 で与える）と材料番号（ここでは，はり全体が

同一材料なので材料番号は 1 とする．たとえばはりが 2 個の材料から成り立つ場合には，要素に応じて材料番号を 1 もしくは 2 とする）を設定する．図 1 の要素番号 1 の要素は，要素を囲む節点番号は 2, 3，4，1 であり，材料番号は 1 である．すべての要素の，要素データは

1， 2， 3， 4， 1， 1
2， 3， 7， 8, 4， 1
3， 7， 10， 11, 8， 1
4， 10， 13， 14, 11， 1
5， 13， 16， 17, 14， 1
6， 16， 19， 20, 17， 1
7， 19， 22， 23, 20， 1
8， 22， 25， 26, 23， 1
9， 25， 28， 29， 26， 1
10， 28， 31， 32， 29， 1
11， 5， 6， 3, 2, 1
12， 6， 9， 7， 3， 1
13， 9， 12， 10， 7， 1
14， 12， 15， 13， 10， 1
15， 15， 18， 16， 13 , 1
16， 18， 21， 19， 16， 1
17， 21， 24， 22， 19， 1
18， 24， 27， 25， 22， 1
19， 27， 30， 28， 25， 1
20， 30， 33， 31， 28， 1

と表される．

次に，**拘束**（constraint）データを考える．節点に拘束を与えない場合，はりには剛体変位や剛体回転が生じ，問題そのものが解析できない．本問題では，左端の節点 1，2，5 を完全固定（x, y 方向への移動を 0.0 に拘束する）する．問題によっては，考えている問題の剛体変位や剛体回転を防ぐために，変形の対称性などから変位の拘束状態を付与することが必要な場合があることに留意する．節点の x, y 方向別の拘束ありを 1，拘束なしを 0 で表し，すべての拘束節点を

1, 1, 0.0, 1, 0.0
2, 1, 0.0, 1, 0.0
5, 1, 0.0, 0, 0.0

と表すことができる．拘束の有無を表す 0 および 1 は整数，拘束量は実数とする．

最後は**荷重**（load）データについて述べる．図 1 に示すように，右端の節点 31，32，33 の y 軸の負の方向に 1000N が作用するものとする．ヤング率を与えた際の力の単位はニュートン［N］であったから，荷重の単位もニュートン［N］で与える必要がある．この荷重データを

31, 0, -1000.0
32, 0, -1000.0
33, 0, -1000.0

と与える．荷重節点番号は整数で，荷重値は実数とする．

なお，以上の問題では，総節点数が 33，材料数が 1，総要素数が 20，拘束節点数が 3，荷重節点数が 3 であり，これらを**基本データ**（basic data）と名付ける．

以上の説明に基づいて，図 1 の問題に関して，ユーザーが用意すべきデータは，最初の行に基本データを与えて

33， 1， 20 ，3， 3
1 , 0e+00 , 1e+02

2 , 0e+00 , 5e+01
3 , 5e+01 , 5e+01
4 , 5e+01 , 1e+02
5 , 0e+00 , 0e+00
6 , 5e+01 , 0e+00
7 , 1e+02 , 5e+01
8 , 1e+02 , 1e+02
9 , 1e+02 , 0e+00
10 , 1.5e+02 , 5e+01
11 , 1.5e+02 , 1e+02
12 , 1.5e+02 , 0e+00
13 , 2e+02 , 5e+01
14 , 2e+02 , 1e+02
15 , 2e+02 , 0e+00
16 , 2.5e+02 , 5e+01
17 , 2.5e+02 , 1e+02
18 , 2.5e+02 , 0e+00
19 , 3e+02 , 5e+01
20 , 3e+02 , 1e+02
21 , 3e+02 , 0e+00
22 , 3.5e+02 , 5e+01
23 , 3.5e+02 , 1e+02
24 , 3.5e+02 , 0e+00
25 , 4e+02 , 5e+01
26 , 4e+02 , 1e+02
27 , 4e+02 , 0e+00
28 , 4.5e+02 , 5e+01
29 , 4.5e+02 , 1e+02
30 , 4.5e+02 , 0e+00
31 , 5e+02 , 5e+01
32 , 5e+02 , 1e+02
33 , 5e+02 , 0e+00
1 , 206000 , 0.3 , 5
1 , 2 , 3 , 4 , 1 , 1
2 , 3 , 7 , 8 , 4 , 1
3 , 7 , 10 , 11 , 8 , 1
4 , 10 , 13 , 14 , 11 , 1
5 , 13 , 16 , 17 , 14 , 1

6 , 16 , 19 , 20 , 17 , 1
7 , 19 , 22 , 23 , 20 , 1
8 , 22 , 25 , 26 , 23 , 1
9 , 25 , 28 , 29 , 26 , 1
10 , 28 , 31 , 32 , 29 , 1
11 , 5 , 6 , 3 , 2 , 1
12 , 6 , 9 , 7 , 3 , 1
13 , 9 , 12 , 10 , 7 , 1
14 , 12 , 15 , 13 , 10 , 1
15 , 15 , 18 , 16 , 13 , 1
16 , 18 , 21 , 19 , 16 , 1
17 , 21 , 24 , 22 , 19 , 1
18 , 24 , 27 , 25 , 22 , 1
19 , 27 , 30 , 28 , 25 , 1
20 , 30 , 33 , 31 , 28 , 1
1, 1, 0.0, 1, 0.0
2, 1, 0.0, 1, 0.0
5, 1, 0.0, 1, 0.0
31, 0, -1000
32, 0, -1000
33, 0, -1000
Beam3*11 sample problem

である．最後の行の beam3*11 sample problem は，問題へのコメントであり，任意のメモを書き添えるようにしている．

以上をまとめると，解析に必要な入力データは以下のようになっている．

入力データの構成（(）内の記号はプログラムで用いている変数名）

1. 基本データ（1 行）
   総節点数（np），材料数（nm），総要素数(ne)，拘束節点数(nb)，荷重節点数(nf)
2. 節点データ（np 行）
   節点番号（1 から），x 座標，y 座標
3. 要素データ（ne 行）
   要素番号（1 から），要素端点の節点番号，もう一方の要素端点の節点番号，縦弾性係数，断面積
4. 材料データ（nm 行）
   材料番号（1 から），縦弾性係数，ポアソン比，板厚（平面応力の場合は実際の厚さ，平面ひずみの場合はゼロ）

5. 拘束データ（nb 行）

拘束節点番号，*x* 方向の拘束の有無（0(拘束なし)か 1（拘束あり)），*y* 方向の拘束の有無（0 か 1）

6. 荷重データ（nf 行）

荷重節点番号，*x* 方向荷重，*y* 方向荷重

7. コメント（1 行）

Beam3*11 sample problem

4. FEM の実行手順

3. で準備したデータ（beam311.dat）をもとに，平面弾性問題の有限要素解析の手順を以下に述べる．

本プログラム isop4.exe を起動すると図 2 のような起動画面が示される．

ここで，ツールメニューの左側の

「ファイル」－＞「読み込み」

をクリックすると，ファイル選択のダイアログボックスが表示されるので，3. のデータ beam311.dat を選択する．

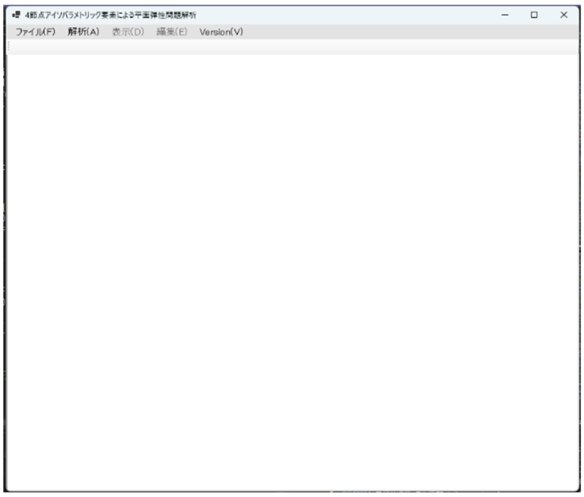


図 2　起動画面

図 5 は，そのファイルを選択後の画面である．画面には，与えられた節点データ，要素データに基づいて要素分割形状が描かれ，拘束節点や荷重節点

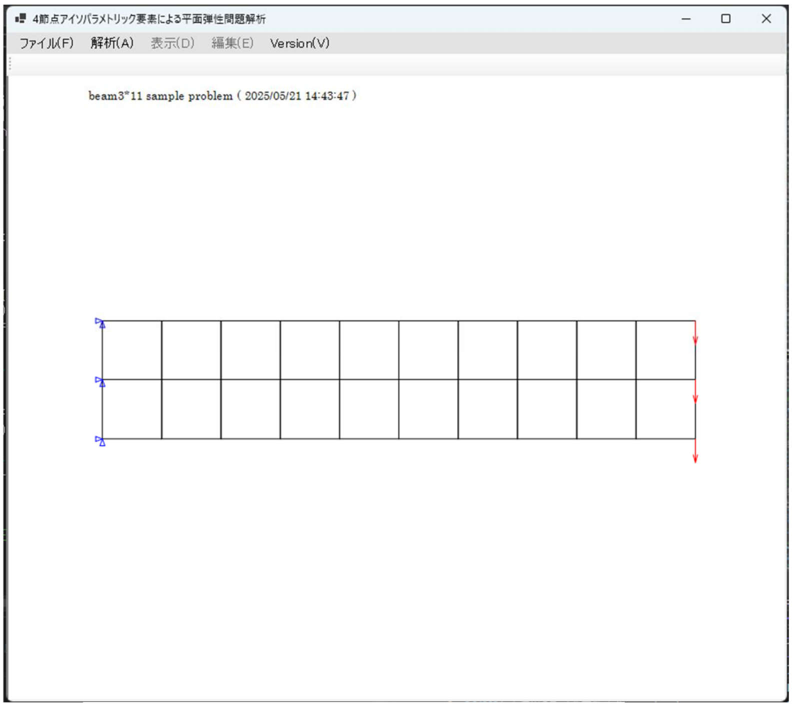


図 3　データファイル読み込み後の画面

に対してもそれに応じた記号が描かれる．

　次に，ツールメニューの「解析」－＞「実行」とメニューを選択すれば，有限要素解析が実行される．本問題はわずか 33 節点の小規模な問題なので瞬時に解析が終了する．なお，数千節点の規模の問題であっても数秒で解析が終了する．

　解析が終わったあとに，ツールメニューの「表示」－＞「変位」

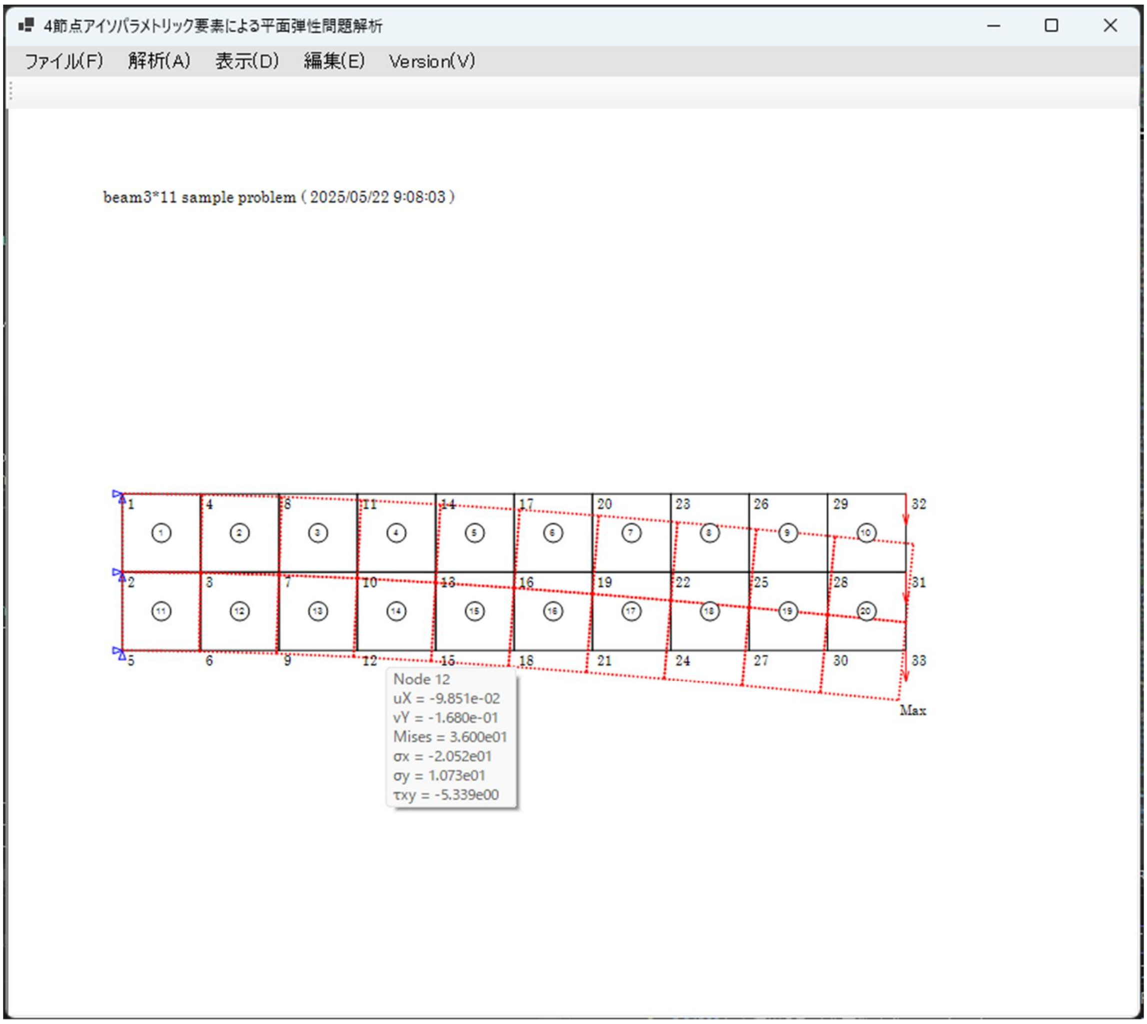


図 4　変形図の表示

とすると，図 4 のような変形図が表示される．そこでは，はりの変形後の様子が赤い破線で示され，最大変位の生じる節点近傍に「Max」という文字が表示される．わかりやすさのために，変位の大きさは実際の変位をすこし大げさに拡大して（最大変位の大きさが画面の大きさの 10%としている）表示している．

　さらに，マウスを節点近くに移動させると（**マウスホバー**（mouse hover）という），その節点の変位（と同時に応力成分も）の大きさが，x, y 成分ごとにポップアップ表示される．図 4 には，節点 12 の近くにマウスを近づけたときの変位や応力の値がポップアップされる様子が示されている．

　次に，ツールメニュー「表示」－＞「応力」とたどれば，4 つの応力成分（Mises 応力，σ_x，σ_y，τ_{xy}）のカラーマップ（コンター図ともいう）を得ることができる．図 5 は，「表示」－＞「応力」－＞

「Sigma-x」とたどったときの応力のカラーマップの図である．

図 5 では，応力の最小値から最大値までを 10 等分した色づけによって要素の応力が表示される．画面の右には，色の対応した凡例が示される．また，最大応力，最小応力の生じている節点の近くに

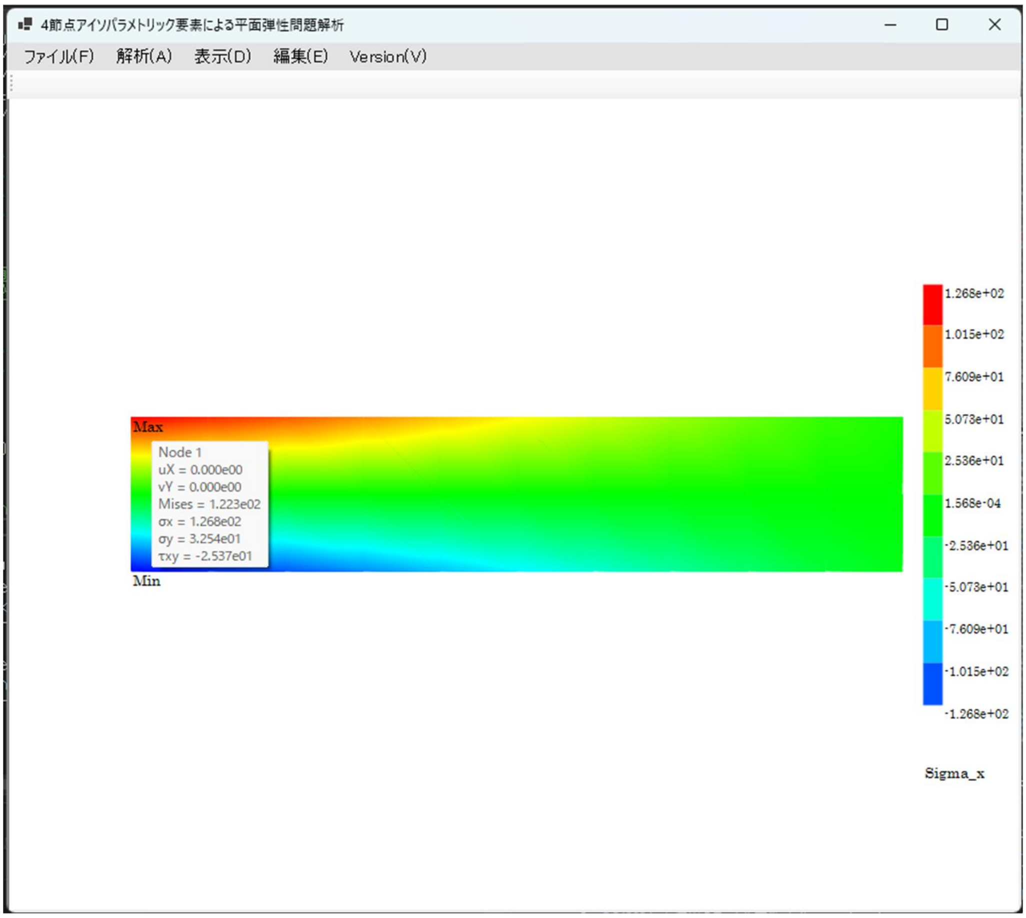


図 5　応力のコンターマップ

「Max」,「Min」と表示される．

なお，変位と同様，節点の近くにマウスホバーすると，その節点の応力（および変位）値がポップアップ表示される．図 5 には，固定部上側の節点番号 1 の応力値（および変位の値）がポップアップ表示され，その大きさが σ_x≒127N/mm^2 と読み取れる．

材料力学によれば，幅 b（図 1 では，厚さ t に相当），高さ h の断面を有する片持ちはりの固定端の応力 σ は，P をはり先端に作用する荷重として

$$\sigma = \frac{M}{bh^2/6} = \frac{6Pl}{bh^2} \tag{1}$$

と表される．本問題では，P=1000×3=3000 N，l=500 mm，b (=t) = 5 mm，h = 100 mm であるから

$$\sigma = \frac{6\times3000\times500}{5\times100^2} = 180\mathrm{N/mm^2} \tag{2}$$

と得られる．FEM の結果（127 N/mm²）は式(2)より約 30%小さいが，これはメッシュが粗いためである．

はりの先端のたわみ δ は，はり理論によれば

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI} = \frac{Pl^3}{3E(bh^3/12)} = \frac{4Pl^3}{Ebh^3} \tag{3}$$

である．本問題の数値を代入すると

$$\delta = \frac{4Pl^3}{Ebh^3} = \frac{4\times3000\times500^3}{206\times10^3\times5\times100^3} = 1.456\text{mm} \tag{4}$$

と得られる．FEM の結果は，$\delta = u_x = 1.326$ mm であるので，この結果は式（4）より約 9%小さい．

有限要素法は，変位関数を仮定してから理論展開しているので，変位の微分によって得られる応力は変位に比べてその精度が低い．

参考までに，より細かな要素分割（561 節点，500 要素）による結果を図 6 に示す．

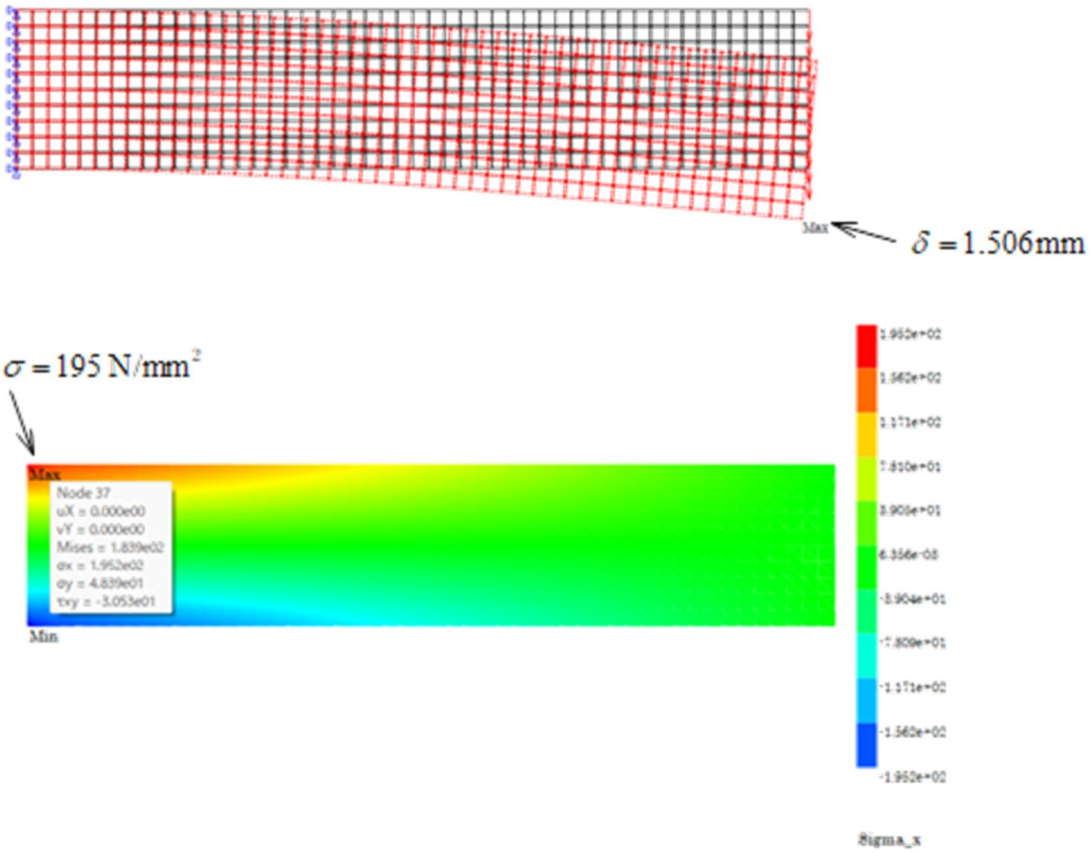


図 6　細分割したときのはりの曲げ

本問題のように，はりの長さ l に対する高さ h の比 h/l が大きい場合には，せん断力によるたわみも考慮する必要がある．せん断力の影響を考慮したはり先端のたわみは

$$\delta = \frac{Pl^3}{3EI}\left(1+0.975\frac{h^2}{l^2}\right) = \frac{4Pl^3}{Ebh^3}\left(1+0.975\frac{h^2}{l^2}\right) = 1.512\ \mathrm{mm} \tag{5}$$

であるから，このたわみは，FEM によって得られた図 5 の先端変位 δ =1.506 mm とよい一致を示している．

本プログラムでは，マウスホイールの回転で図形の拡大縮小，マウスの左ボタンのドラッグで移動が自由に行えるようになっている．解析対象を拡大表示して応力を表示すれば，応力を仔細に把握できる．図 7 は，解析対象の固定端付近を拡大表示して，応力値などをポップアップ表示した例である．

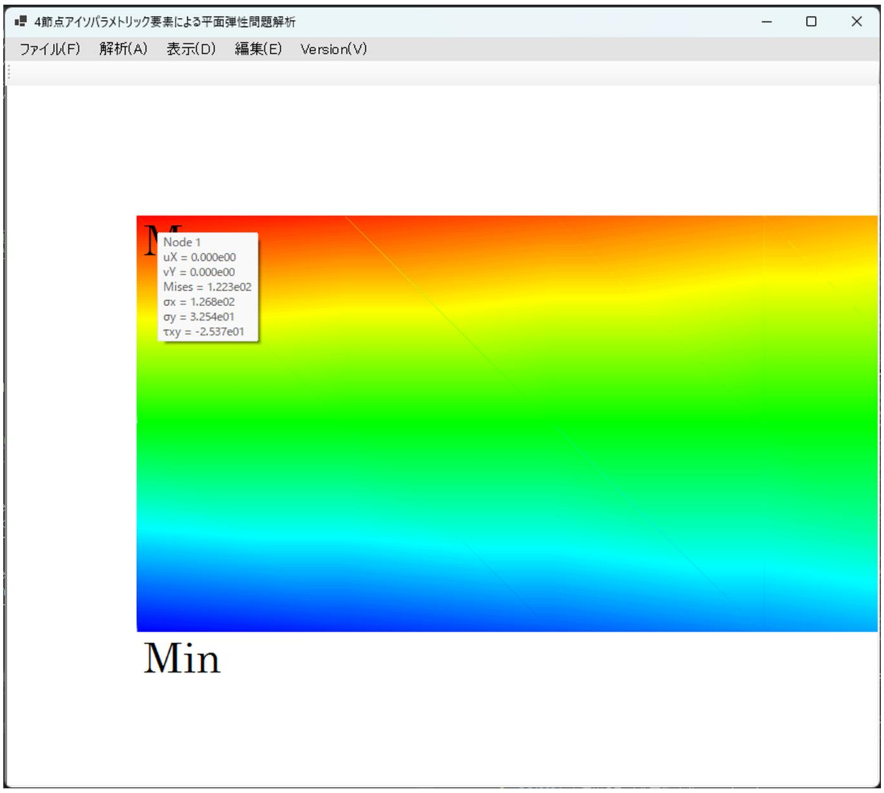


図 7　拡大表示の例

5. 解析結果のテキスト出力

本プログラムでは，実行ファイル isop4.exe の置かれたフォルダーに，解析結果が Isop4-Results.txt というファイル名で書き込まれる．

本例のそのファイルの内容は以下のようである．

```
********************************************************
*              有限要素法による平面弾性問題解析          *
```

```
*         ==4 節点アイソパラメトリック要素==       *
*                  (  Skyline Method  )           *
*                      Ver.1.05 (2021)            *
*      ==  DATE & TIME 2025/05/23 10:25:26 ==     *
* Copyright(C) 2025 All Rights Reserved by T. HORIBE  *
*********************************************************

File name ==> C:¥Users¥user¥Dropbox¥vb2022¥backup¥isop4¥cantilever311.dat

 総 節 点 数    = 33
 総 材 料 数    = 1
 総 要 素 数    = 20
 拘 束 節 点 数 = 3
 荷 重 節 点 数 = 3
```

=========== 節 点 デ ー タ ============

節点番号	x-座 標	y-座 標	節点番号	x-座 標	y-座 標
1	0	100	2	0	50
3	50	50	4	50	100
5	0	0	6	50	0
7	100	50	8	100	100
9	100	0	10	150	50
11	150	100	12	150	0
13	200	50	14	200	100
15	200	0	16	250	50
17	250	100	18	250	0
19	300	50	20	300	100
21	300	0	22	350	50
23	350	100	24	350	0
25	400	50	26	400	100
27	400	0	28	450	50
29	450	100	30	450	0
31	500	50	32	500	100
33	500	0			

====== 材 料 デ ー タ ======

材料番号　ヤング率　ポアソン比　板　厚

1	206000	0.3	5

========= 要　素　デ　ー　タ ===========

要素番号	i	j	k	l	材料番号
1	2	3	4	1	1
2	3	7	8	4	1
3	7	10	11	8	1
4	10	13	14	11	1
5	13	16	17	14	1
6	16	19	20	17	1
7	19	22	23	20	1
8	22	25	26	23	1
9	25	28	29	26	1
10	28	31	32	29	1
11	5	6	3	2	1
12	6	9	7	3	1
13	9	12	10	7	1
14	12	15	13	10	1
15	15	18	16	13	1
16	18	21	19	16	1
17	21	24	22	19	1
18	24	27	25	22	1
19	27	30	28	25	1
20	30	33	31	28	1

========= 拘　束　条　件 =========

拘束節点番号	ix	x-変位拘束値	iy	y-変位拘束値
1	1	0	1	0
2	1	0	1	0
5	1	0	1	0

======== 荷　重　条　件 ========

節点番号	x 方向荷重	y 方向荷重
31	0	-1000
32	0	-1000

33 0 -1000

========= 変 位 ==========

節点	u	v	節点	u	v
1	0.0000e+00	0.0000e+00	2	0.0000e+00	0.0000e+00
3	3.0125e-08	-1.8636e-02	4	3.6025e-02	-2.4958e-02
5	0.0000e+00	0.0000e+00	6	-3.6025e-02	-2.4958e-02
7	5.5360e-08	-7.6015e-02	8	6.9324e-02	-8.0498e-02
9	-6.9324e-02	-8.0498e-02	10	6.7723e-08	-1.6390e-01
11	9.8515e-02	-1.6802e-01	12	-9.8515e-02	-1.6802e-01
13	6.8218e-08	-2.7918e-01	14	1.2385e-01	-2.8268e-01
15	-1.2385e-01	-2.8268e-01	16	6.7987e-08	-4.1781e-01
17	1.4528e-01	-4.2074e-01	18	-1.4528e-01	-4.2074e-01
19	4.8883e-08	-5.7594e-01	20	1.6282e-01	-5.7828e-01
21	-1.6282e-01	-5.7828e-01	22	4.2291e-08	-7.4965e-01
23	1.7646e-01	-7.5140e-01	24	-1.7645e-01	-7.5140e-01
25	4.3624e-08	-9.3504e-01	26	1.8620e-01	-9.3624e-01
27	-1.8620e-01	-9.3624e-01	28	1.0421e-07	-1.1283e+00
29	1.9202e-01	-1.1288e+00	30	-1.9202e-01	-1.1288e+00
31	1.7084e-07	-1.3250e+00	32	1.9412e-01	-1.3258e+00
33	1.4528e-01	1.4528e-01			

======== 節 点 応 力 =========

	x 方向	y 方向	せん断	等価
節点番号	σx	σy	τxy	σe
1	1.2682e+2	3.2543e+1	-2.5368e+1	1.2225e+2
2	1.3542e-4	3.2425e-5	-1.9585e+1	4.5773e+1
3	1.1921e-4	-5.7220e-6	-4.3479e+0	4.7334e+1
4	1.1635e+2	1.2415e+1	-6.3986e+0	1.1392e+2
5	-1.2682e+2	-3.2543e+1	-2.5368e+1	1.2225e+2

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝途中省略＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

28	1.4496e-4	-1.2207e-4	-5.2208e+0	1.0158e+1

```
  29       1.3382e+1    1.7301e+0    -5.0761e+0   1.6671e+1
  30       -1.3382e+1   -1.7302e+0   -5.0765e+0   1.6671e+1
  31       3.3569e-4    7.3242e-4    -4.8303e+0   9.0770e+0
  32       6.4251e+0    -1.3094e+0   -5.2493e+0   1.1579e+1
  33       -6.4251e+0   1.3105e+0    -5.2495e+0   1.1580e+1

semax= 1.2225e+02   in Node No. 1

*************************************************
  beam3*11 sample problem   2025/05/23 10:25:26
*************************************************
```

出力内容の荷重条件までは，入力データ内容の出力であり，それ以降は，FEM 解析によって得られたすべての節点変位や要素応力の出力である．また，応力の出力結果の最後の方には，最大等価応力の値なども出力されている．（等価応力とは，Mises 応力を指す）

出力結果のなかで，たとえば

```
 =======  変      位  =======
節点           u            v
  3        3.0125e-08   -1.8636e-02
...............................................
```

と出力されている部分については，節点 3 の x , y 方向の変位の大きさを表しており，入力時での長さの単位は【mm】であったので，これらの変位の単位は【mm】である．なお，節点 3 の x 方向の変位が 3.0125e-08 mm と出力されているが，これは，実質的にゼロとみなしてよい．

同様に，要素番号ごとの出力

```
             x 方向         y 方向        せん断        等価
節点番号        σx            σy            τxy           σe
 1         1.2682e+2     3.2543e+1     -2.5368e+1    1.2225e+2
  ...............................................
```

については，縦弾性係数を入力したときの単位（N/mm^2）に対応して，応力は N/mm^2 の単位となっていることに留意する．すなわち，節点 1 に生じている応力は，例えば $\sigma_x = 1.2682 \times 10^2$ N/mm^2 ≒ 127 MPa と読み取ればよい．

出力されるファイル Isop4-Results.txt は，FEM 解析の実行の度に同名で書き込まれる．したがって，このファイルを保存したい場合には，別名でコピーしておくとよい．

7．ほかの解析例

本プログラムによる解析例を以下に示す．

【例 1】板の引張り

図 8 は，図 1 の形状の板の右端に，水平方向に荷重 3000N を負荷したときの解析例である．この問題では，図 8 の右上に注記したように，右端への負荷荷重の与え方には注意が必要である．右端に作用させる水平荷重については，分布荷重から由来していると考えると，節点 32，31，33 での荷重比は 1：2：1 となる．したがって，全荷重 3000 N を 750 N，1500 N，750 N と分配して作用させればよ

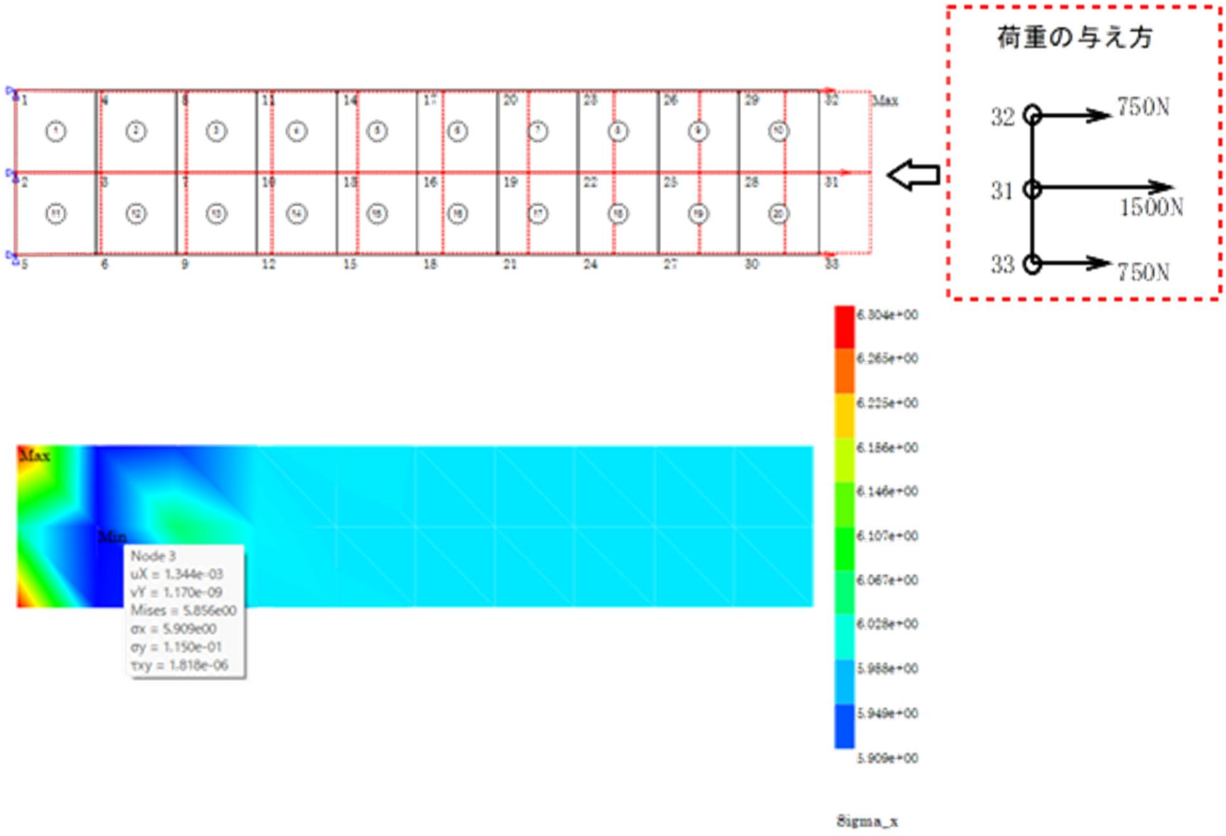


図 8　板の引張り

い．

この板は一様な引張り状態にあり，材料力学に基づく x 方向の応力や伸びは

$$\sigma = \frac{P}{bh} = \frac{3000}{5\times100} = 6\ \mathrm{N/mm^2},\quad \lambda = \frac{Pl}{AE} = \frac{3000\times500}{5\times100\times206\times10^3} = 0.0146\ \mathrm{mm} \qquad (6)$$

と求められる．図 8 では，σ_x がやや不自然な色づけになっているが，凡例を細かく見ると，x 方向応力はほぼ 6 N/mm^2 の値の前後で分布していることに気づく．固定端でやや高い応力が生じているのは，ポアソン効果による y 方向への収縮量を無理に抑えつけているためである．

また，FEM による右端の変位量は 1.450×10^{-2} mm となっているので，正しい計算が行われていることがわかる．

【例 2】円孔を有する帯板の引張り

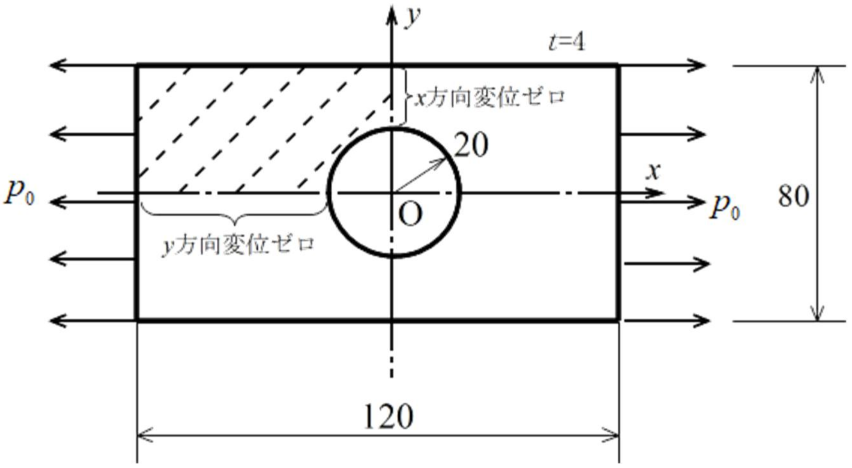
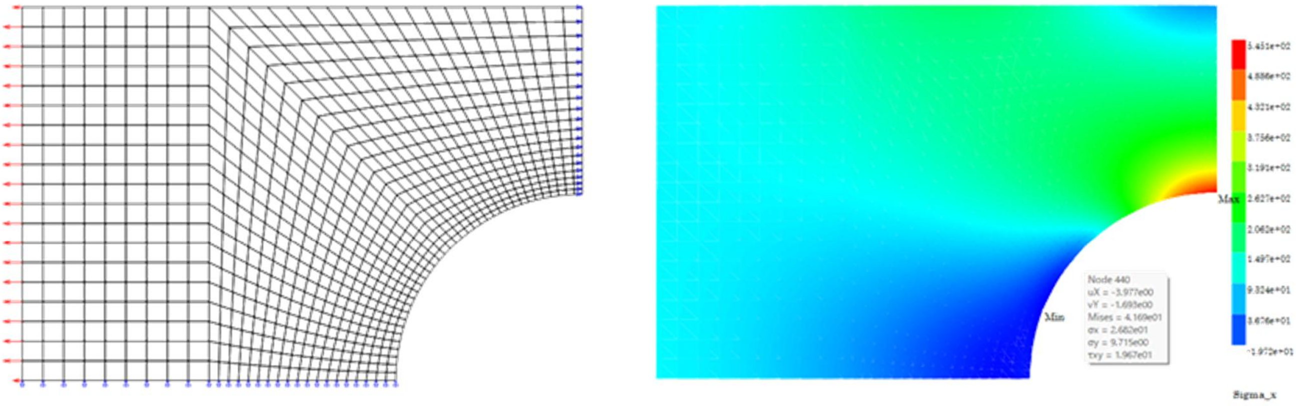


図 9　円孔を有する帯板の引張り

図 9 は，応力集中の典型的な問題として扱われる，円孔を有する帯板の引張り問題である．この問題は，x, y 対称性を有するので，図 9 の破線で示した 1／4 部分だけを取り出して解析すればよい．ただし，円孔中心を通る x 軸上の節点は y 方向変位がゼロ，また y 軸上の節点は x 方向変位がゼロという変位拘束があることを考慮する必要がある．

図 9 の寸法を与え，単位面積あたりの引張り力を p_0，縦弾性係数を E=206×10^3 N/mm^2 として図 10(a)のようなメッシュ分割を行って解析する．なお，帯板の左側縦辺には，上下端の節点に 500N，それ以外の節点に 1000 N の節点力を左方に作用させている．その結果，図 10(b)のような σ_x の応力コンター図が得られた．予想通り，円孔周辺に最大応力が生じていることがわかる．

解析結果から図 10 の左側の縦辺に生じている応力の x 成分$(\sigma_x)_0$（これは p_0 と等しい）を読み取ると，おおよそ$(\sigma_x)_0$=1.190×10^2 N/mm^2 を得る．一方で，円孔周辺の x 方向の最大応力は$(\sigma_x)_{max}$=5.451×10^2 N/mm^2 と得られる．したがって，この帯板の応力集中係数 K は



(a) メッシュ分割（960節点，893要素）　　(b) Mises応力のコンター図

図 10　円孔を有する帯板の要素分割と σ_x のコンターマップ

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{p_0} = \frac{5.451 \times 10^2}{1.190 \times 10^2} = 4.58 \tag{7}$$

となる．

一方，著者による弾性論に基づく解析より，帯板幅に対する円孔の大きさの比を変数とする円孔周辺の応力集中係数は図 11 のような結果を得ている．図 11 より，a=0.5 のとき（図 9 では，帯板の幅 80 mm に対して，円孔の直径は 40 mm なので 40/80=0.5 と計算される量）の応力集中係数 K は

$$K = \frac{\sigma_{\max}}{p_0} \approx 4.6 \tag{8}$$

であるから，FEM 解と理論解とは良好に一致していることがわかる．

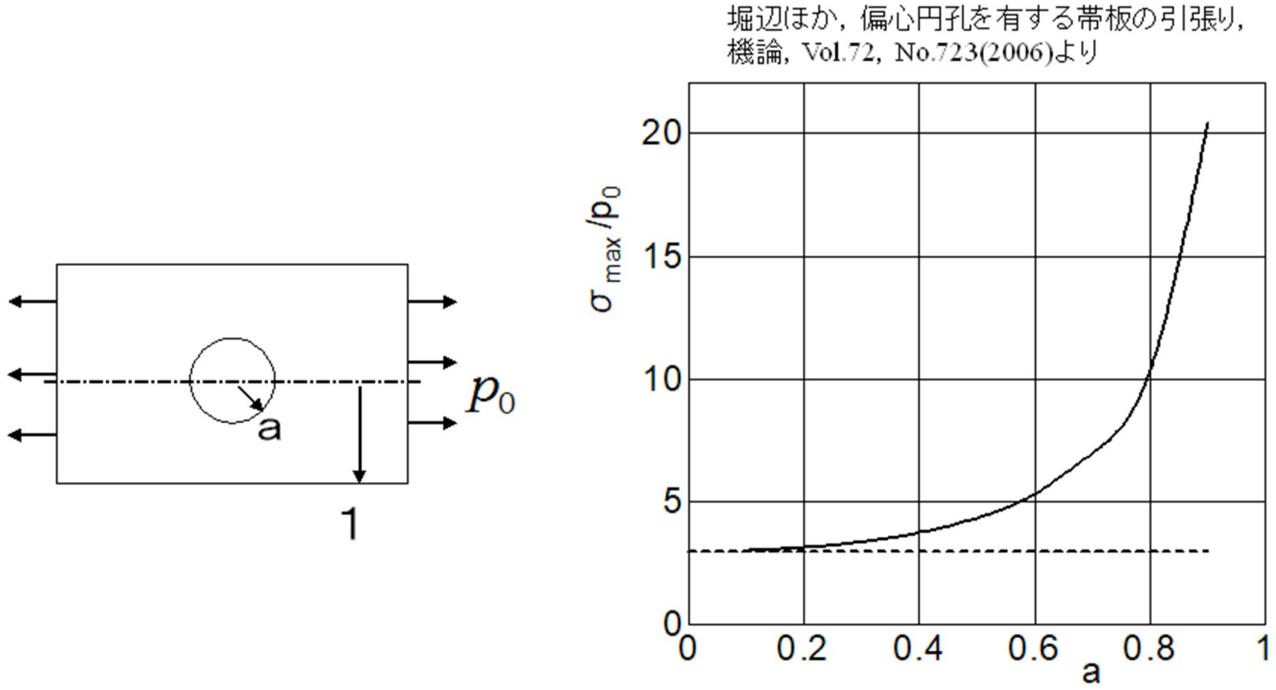
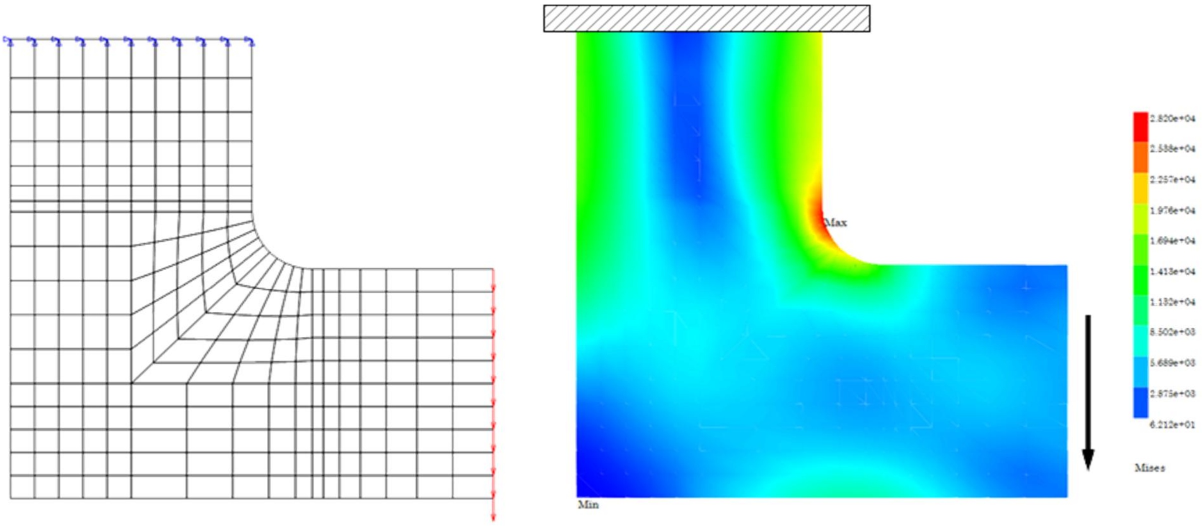


図 11　円孔を有する帯板の引張りの応力集中係数

【例 3】 L 型はりの曲げ

図 12 は，L 字型の物体の右側下方の辺に，下向きの荷重を作用させた場合の要素分割図と Mises 応力のコンター図を示している．丸められた角部に応力集中が生じている様子を捉えている．



(a) メッシュ分割　　(b) Mises応力のコンター図

図 12　L 型はりの曲げ

8. 利用上の注意，著作権ほか

本プログラムは，基本的には，FEM の教育用に開発したものであり，一般的な実務での利用は意図していない．このため，演習の目的以外の利用での結果については保証できない．

また，本プログラムは自由に利用できるが，著作権は著者にあり無断複製や第三者への無断配布などは控えていただきたい．

本プログラムには，まだ，バグや操作法の不具合などが潜んでいることと予想される．その場合には，著者へご連絡いただけるとありがたい（連絡先：tadashihoribe@gmail.com）．

9. 参考文献

1）堀辺忠志著，Visual Basic でわかるやさしい有限要素法の基礎，森北出版（2008）．
2）戸川隼人著，マイコンによる有限要素解析（続），培風館（1983）．
3）戸川隼人著，有限要素法概論，培風館（1981）．
4）堀辺忠志著，例題で学ぶ材料力学，森北出版（2022）．
5）中原ほか 5 名，弾性学ハンドブック，朝倉書店（2002）．