

FLEXIBLE BARS

たわみやすいはりの大変形理論

R. Frisch-Fay 著

堀辺 忠志 訳

本著書（訳書）は旧著作権法におけるいわゆる翻訳権の 10 年留保にもとづいたものです。1970 年 12 月 31 日まで適用されていた旧著作権法には「著作権者原著作物発行のときより十年内に其の翻訳物を発行せざるときは其の翻訳権は消滅す」（旧著作権法第七条）とあり、外国語の著作物が刊行後 10 年以内に翻訳出版されなければその著作物の翻訳権はなくなり、自由に翻訳出版ができるようになることが規定されていました。1971 年 1 月 1 日から施行された現行の著作権法にこの 10 年留保の規定はありませんが、附則に「この法律の施行前に発行された著作物については、旧法第七条及び第九条の規定は、なおその効力を有する」（著作権法附則第八条）とあり、現行法施行以前に発行された著作物については 10 年留保が適用されることが規定されています。

R. Frisch Fay の「FLEXIBLE BARS」の初版は 1962 年発行であり、また日本語訳も出版されていないので、「FLEXIBLE BARS」は 10 年留保の適用対象であることとなります。

FLEXIBLE BARS

by

R. Frisch-Fay

Lecturer in Civil Engineering

The University of New South Wales

©Butterworths & Co. (Publishers) Limited 1962

はじめに

ドイツ人数学者の Clebsch は、100 年前に「弾性体の理論」(Theorie der Elasticität fester Körper) を著している。長い間、この本は、弾性理論一般についてとりわけ変位について理解しやすい内容の本として好評であった。1880 年に出版された Saalschütz の「荷重を受ける棒」(Der belastete Stab) は、線形だけではなく非線形範囲における棒の変位を詳しく扱った最初の本である。ロシア人の Popov による専門書「細い棒の非線形力学」(Nonlinear problems in the statics of thin rods) が 1948 年に出版されるまで、この種の書籍は出版されていなかった。

学部生を対象にした材料の力学を扱った数多くの書籍が出版されているが、エンジニア、物理学者および数学者向けのより高度な内容の本は少ない。そして、これらの高度な本についてもそのごく一部が非線形変形について簡単に述べているだけである。そして、一般的に言えば、非線形の曲げと棒のたわみについてはこれまではほとんど扱われておらず、19 世紀に出版されたドイツ語の本を別にすればロシア語の Popov の本だけが入手可能な状態となっている。本書はこの隙間を埋めることを意図している。

本書は、大学高学年生と研究者のために書かれている。本書で扱っている問題の多くは詳しく述べられているが、ある場合（それほど多くはないが）には最終結果だけが述べられている。多くの解法については、大学卒業程度の工業数学の知識および楕円関数と積分の理解を前提としている。答えの誘導法が示されていない場合にはその導出法を詳しく述べた参考文献が与えられている。

1 章では基礎式の導出を論じ、2 章では片持ちはりについて、3 章では両端支持はりについて、4 章では初期曲率を持つはりについて論じる。5 章では、閉じた形の解が得られていない問題を解析するための近似解法について説明する。最後に、6 章は 3 次元空間での非線形たわみについて紹介する。

著者は、この場を利用して、本書の最終稿を仕上げるに際して貴重な支援とご批評を賜った、ニューサウスウェールズ大学の専任講師の F. E. Archer 氏および土木工学科講師 I. J. Somervaille 氏に感謝の意を表す。また、著者は、メルボルンのオーストラリア連邦産業科学技術機構から許可を頂き、オーストラリア応用科学ジャーナルの図とデータを 2.5, 2.8, 3.1, 3.3, 4.7, 4.10 節に使わせていただいた。このことに謝意を表したい。さらに、著者は、アメリカ機械学会 (ASME) の応用力学学会誌の編集者と A. E. Seames 氏にもお世話になっている。4.12 節および 5.8 節に関連して、H. D. Conway 教授に便宜をはかってもらっている。そして、6.6 節では、広範囲にわたって日本機械学会論文集のばねの解析の論文を利用させてもらった。この論文の著者の水野 正夫教授 (慶応大学) に

も感謝したい。

Ryde, New South Wales R. FRISCH-FAY

1962年1月

訳者注：単位について

原著では、長さとしてインチ (in.)、力として重量ポンド (lb) の単位系を用いている。
これを、通常の SI 単位系に換算するには

$$1 \text{ in.} = 25.4 \text{ mm}$$

$$1 \text{ lb} = 4.54 \text{ N}$$

とすればよい。

また、曲げ剛性 $EI \text{ lb in.}^2$ に関しては

$$1 \text{ lb in.}^2 = 28.704 \times 10^3 \text{ Nmm}^2$$

となる。

なお、本書では、原著で用いられているインチポンド単位を SI 単位へ換算し、その結果をすべて括弧内に示している。

目次

第 1 章	基礎方程式	1
1.1	線形変形と非線形変形について	1
1.2	2 階の非線形微分方程式. 楕円関数と楕円積分	3
1.3	垂直方向の荷重を受ける柱	6
1.4	無限長の棒	12
1.5	ノーダルエラスティカ	13
1.6	キルヒホッフの運動的類似. 振り子	16
1.7	圧縮力を受ける棒のたわみ ⁽¹⁵⁾	20
1.8	柱への偏心負荷	26
1.9	曲げに基づく柱のひずみエネルギー	27
第 2 章	片持ちはり	31
2.1	曲線状のはりのつり合い方程式	31
2.2	自由端で垂直方向の点荷重を受ける水平な片持ちはり	33
2.3	弾性相似則の原理	39
2.4	自由端に荷重と曲げモーメントを受ける片持ちはり	42
2.5	一定の曲げモーメントを受ける片持ちはり	47
2.6	傾斜した荷重を受ける片持ちはり	49
2.7	2 個の垂直荷重を受ける片持ちはり	54
2.8	n 個の集中荷重を受ける片持ちはり	61
第 3 章	2 つの支点を有するはり	71
3.1	ナイフエッジ支点上の真直はり	71
3.2	両端固定のたわみやすいはり	81
3.3	非対称荷重を受ける両端支持はり	89
第 4 章	初期曲率を有し集中荷重を受けるはり	95
4.1	基礎方程式	95
4.2	自由端に垂直荷重を受ける, 初期曲率を有するはり	96

4.3	曲線状はりに水平荷重が作用する場合	102
4.4	傾斜した荷重を受ける円弧はり	106
4.5	板ばねの座屈形状	110
4.6	円輪の引張り	115
4.7	円輪の圧縮	120
4.8	円輪の近似解析	128
4.9	2枚の板によって圧縮されるたわみやすい円輪	131
4.10	板ばね	132
4.11	両端固定の半円輪	141
4.12	集中荷重を受ける曲がりはりの数値解析	147
第5章	分布荷重を受ける場合のべき級数の応用	159
5.1	基礎方程式	159
5.2	自重による柱の座屈	162
5.3	分布荷重を受ける水平な片持ちはり	168
5.4	法線方向に一様な分布荷重を受ける片持ちはり	173
5.5	ハート型のはり	176
5.6	等分布荷重を受ける単純支持はり	178
5.7	図式解法によるたわみの計算	180
5.8	分布荷重を受けるはりの数値解析	186
第6章	棒の3次元変形	193
6.1	一般化した運動的類似	193
6.2	曲率 p , q および r	196
6.3	円錐 P および H	198
6.4	弾性変形形状	199
6.5	コイルばね	203
6.6	コイルばねの大変形	204
	訳者あとがき	213
	索引	215

第 1 章

基礎方程式

1.1 線形変形と非線形変形について

荷重を受けるはりのたわみを求める際、通常はベルヌーイ・オイラーの法則 (Bernoulli-Euler's law) が用いられる。この法則によれば、はりの任意点における曲げモーメントは、その荷重によって生じる曲率の変化に比例する。たわみ曲線が式 $s = f(\varphi)$ で与えられるなら、その基礎方程式は

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{d\varphi}{ds}$$

となる。ここで、 s はたわみ曲線に沿った長さ、 φ は位置 s におけるたわみ角である。

直角座標における曲率は、次式 (1.1) で表される。

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2y/dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \quad (1.1)$$

ここで、負の符号は、下方向へのたわみを正として仮定した場合、 x が増加するとたわみ角 φ が減少するということにより説明される。曲げモーメント M は x の関数なので

$$M = \frac{EI}{r} = g(x) \quad (1.2)$$

のように表すことができる。式 (1.1) と式 (1.2) を組み合わせると、2 次の非線形微分方程式を得る。通常の工学上の問題への適用にあたっては、たわみ角の 2 乗 $(dy/dx)^2$ は 1 に比べて小さいので無視し、曲げモーメントと曲率の関係式は線形化される。はりの長さに比べてたわみが小さければ、すなわち、はりのたわみ曲線が緩やかであればこの手法は正しい。はりの長さに比べてたわみが大きくなるような、細長いはりや針金などについてはこの仮定が成り立たない。したがって、たわみ角の 2 乗を省略した初等的な理論式は、大変形あるいは大たわみ (large deflection) の計算に適用することはできない。この簡単な例を以下に示す。片持ちはりの先端に荷重 P を受けるときの自由端のたわみ式 $\delta = Pl^3/(3EI)$ を用いると、細長いはりではおかしな結果が生じる。つまり、は

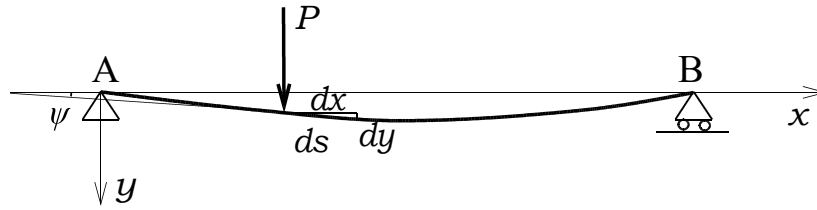


図 1.1

りの長さが $l = 100 \text{ in.} (= 2540 \text{ mm})$, 荷重が $P = 1 \text{ lb} (= 4.45 \text{ N})$, そして曲げ剛性が, $EI = 1000 \text{ lb in.}^2 (= 2.8704 \times 10^6 \text{ Nmm}^2)$ なら, たわみとして $\delta = 333 \text{ in.} (= 8458 \text{ mm})$ を得る. これは, はりの長さの 3 倍以上にもなっている.

弾性はりのたわみ曲線は J. Bernoulli によりはじめて研究され, 彼はこの問題の解を得るために, 当時生まれたばかりの微積分学の手法を用いた. はりのたわみに関する最初の研究論文は, Euler により発表された⁽¹⁾. 著書「弾性曲線について」(*De Curvis Elasticis*) の付録において, もしもたわみが小さくなければ, 曲率を表す式中の $(dy/dx)^2$ は省略できないと Euler は説明している. 自由端で垂直荷重を受ける片持ちはりに対して, 彼は, $Cy''/[1 + (y')^2]^{3/2} = Px$ という関係式を見いだした. この式において, 彼は級数展開を行って積分して $C = Pl^2/(2l - 3f)/6f$ の関係を示した. ここに, f は自由端のたわみである. 括弧内の $3f$ を省略すると $f = Pl^3/(3EI)$ を得る. この $3f$ は, 変形中のモーメントの腕の長さの短縮を考慮したものである.

はりの変形は, Lagrange により「バネのたわみについて」(*Sur la Force des Ressorts Pliés*) という名の論文でも研究された⁽²⁾. しかし, 後に Plana によって指摘されたようにその解は誤っていた⁽³⁾.

不正確で時にはおかしい解が生じるほかに, はりの初等理論は, そのはりの変形前の形状に垂直な方向以外のたわみに関しては答えを与えていない. このことは, 図 1.1, すなわち, 荷重 P を受ける両端支持はりによって示される.

通常のとわみに関する理論では, $ds \approx dx$ および $\theta \approx \tan \theta$ と仮定する. したがって, $\int dx \approx \int ds$ となるから, B の転がり支点は A に向かって移動しない. たわんだ後の曲線は, もちろん直線 AB よりも長い, そのたわみ曲線が平坦に近いなら (換言すると, dy が 1 次の微小量ならば), たわんだ後の弧の長さとの直線の長さの差は 2 次の微小量である. このことは, 通常の工学解析においては重要な意味を持つ. なぜなら, 荷重 P は y 方向だけに移動し, したがってたわんでいる間は荷重間の距離が変わらないからである. この状況では, たわみはモーメントや荷重に関して比例している. このことは, 重ね合わせの原理 (principle of superposition) の基礎になっている.

たわみ角が増大するとともに, $dx = ds$ という仮定の妥当性はより根拠を失っていく. つまり, たわみ角が大きくなると, たわみはモーメントや荷重に関して比例せず, もはや重ね合わせの原理が適用できないからである. したがって, 大変形では最終的な変形に行

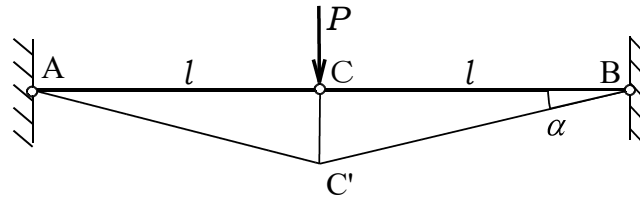


図 1.2

き着くまでの間この影響が積み重なることになる。大変形が生じるすべての場合において、その問題ごとに解析する必要がある。というのも、最終的なたわみはすでに得られているたわみの線形結合であるという仮定（線形性の仮定）のもとでは、大変形問題は解析し得ないからである。

たわみと曲げモーメントの非線形関係は、自由端に荷重 P を受ける片持ちはりにより簡単に例示できる。荷重の大きさをゼロから最終荷重までに少しずつ増加させると、自由端は固定端の方向に近づく。それにより腕の長さが短くなるから、荷重が増えるのと同じ割合では曲げモーメントは増大しない。

大たわみ状態下の力学系は、重ね合わせの原理を当てはめることのできない場合に限ったものではないことに注意をすべきである。たとえば、図 1.2 に示す構造の節点 C は

$$CC' = \delta = l \left(\frac{P}{AE} \right)^{1/3}$$

に従ってたわむ。この式によれば、 P と δ は非線形関係にある*1。

なお、この式は、 $\sec \alpha = 1 + \alpha^2/2$ という近似式を用いているため微小変形の場合だけに成立する。

1.2 2 階の非線形微分方程式. 楕円関数と楕円積分

2 階の線形微分方程式は、2 つの線形独立な解、すなわちそれらが比例関係ではない解を有している。したがって、 y_1 が解であり、また y_2 も同じ微分方程式の解であるなら、その任意の線形結合 $y = Ay_1 + By_2$ もまた解となる。ここで、 A, B は任意定数であり、境界条件から決定されるが、関数 y_1, y_2 は境界条件の影響を受けて関数形は変わることはない。非線形 2 階微分方程式の場合にも、定数 A, B は境界条件から決定されるが、そ

*1 訳注：BC の伸びは、 $l/\cos \alpha - l = l(1/\cos \alpha - 1)$ である。一方、 BC' 部材の軸力を Q とおくと、点 C' での力のつり合いより $2Q \sin \alpha = P \therefore Q = P/(2 \sin \alpha)$ となる。部材 BC' にフックの法則を適用すると

$$\frac{Q}{A} = E \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \therefore \frac{P}{2AE} = \tan \alpha (1 - \cos \alpha)$$

ここで、 $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ (または $\sec \alpha \approx 1 + \alpha^2/2$)、 $\tan \alpha = \delta/l$ を代入すると、 $\delta = l(P/(AE))^{1/3}$ を得る。

これらの定数は単なる係数ではない。解 y は A, B の関数、すなわち、境界条件の関数である(4)。

2階の非線形微分方程式に対する一般的な解法は存在しないが、ニュートンの方程式と呼ばれるある種の式の場合には簡単な手順で解が得られ、それは楕円積分を含んだ形になる。ニュートンの方程式⁽⁵⁾ (Newton's equation) は、従属変数の2階の微分とその変数の非線形関数を含んでいる。その式の形は

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\Phi(y) = 0$$

である。

楕円積分 (elliptic integral) という名は、以下の積分、すなわち

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}}, \text{ および } \int \frac{dx}{(x-b)\sqrt{X}}$$

を指し示すために Legendre により用いられた。ここで、 X は、 x の3次もしくは4次式である。これらの式は、第1種、第2種および第3種の楕円積分と呼ばれている。楕円積分や楕円関数については、Cayley⁽⁶⁾ や Hancock⁽⁷⁾ らによるわかりやすい著書がある。また、簡潔にまとめられた Bowman⁽⁸⁾ による著書もある*2。楕円関数や楕円積分の数表は、Milne-Thomson⁽⁹⁾、Pearson⁽¹⁰⁾ および Jahnke と Emde⁽¹¹⁾ らによって示されている。

目下の議論では、6章を例外として、第1種および第2種の楕円積分だけが重要である。適切な変数変換をすることにより、これらの積分は

$$\int_0^x \frac{dx}{[(1-x^2)(1-p^2x^2)]^{\frac{1}{2}}}, \int_0^x \frac{(1-p^2x^2)^{\frac{1}{2}} dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

と表される。 $x = \sin \phi$ とおけば、以下の第1種の楕円積分 (elliptic integral of the first kind) に関する Legendre の標準形 (Legendre's standard form) を得る。すなわち

$$F(p, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1-p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

第2種の楕円積分 (elliptic integral of the second kind) についても

$$E(p, \phi) = \int_0^\phi (1-p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi$$

を得る。

$F(p, \phi)$ は母数 (modulus) p および積分上限 ϕ の関数である。ここで、

$$u = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1-p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = F(p, \phi)$$

*2 訳注：楕円積分を扱った和書として、戸田 盛和 著、楕円関数入門、日本評論社 (2001) がある。この著書は、楕円積分が必要となる物理現象と結びつけた説明があり読みやすい。

とおき, p を一定とみなし, u の逆関数を, $\phi = \text{am } u$ (u の振幅 (amplitude)) と表す.
したがって

$$\begin{aligned}x &= \sin \phi = \sin \text{ am } u = \text{sn } u, \\(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} &= \cos \phi = \cos \text{ am } u = \text{cn } u, \\(1 - p^2 x^2)^{\frac{1}{2}} &= \Delta \phi = \Delta \text{ am } u = \text{dn } u\end{aligned}$$

となる. ここで, $\text{sn } u$, $\text{cn } u$, および $\text{dn } u$ は **Jacobi** の楕円関数 (Jacobi's elliptic function) である. x と楕円関数の関係は, 三角関数との対比を行えば容易に理解できる.
したがって

$$u = \int_0^x \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin^{-1} x$$

一方で

$$u = \int_0^x \frac{dx}{[(1 - x^2)(1 - p^2 x^2)]^{\frac{1}{2}}} = \text{sn}^{-1} x$$

と表される.

積分の上限に $x = 1$ を代入すると

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = \sin^{-1} 1 = \pi/2$$

となる. また

$$u = \int_0^1 \frac{dx}{[(1 - x^2)(1 - p^2 x^2)]^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = F(p, \pi/2) = K(p)$$

となる. ここで, $K(p)$ は第 1 種の完全楕円積分 (complete elliptic integral of the first kind) であり, その値は p だけに依存する*3. $p = 0$ なら, $K(0) = \pi/2$ であり, 上に示したように三角関数の \sin と楕円関数の sn は同じである. 同様に, $p = 0$ なら, $\cos u = \text{cn } u$ であり, $p = 1$ なら,

$$\begin{aligned}\text{sn } u &= \tanh u, \\ \text{cn } u &= \text{sech } u = \text{dn } u\end{aligned}$$

となる.

第 2 種の完全楕円積分 (complete elliptic integral of the second kind) は,

$$E(p, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} (1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi = E(p)$$

により定義される. 楕円積分 E, F は, $p = 0, p = 1$ のときだけ閉じた解を持っている. そのほかの場合には, 級数展開などにより積分が評価される⁽¹²⁾.

*3 訳注: この完全楕円積分に対して, 積分の上限が ϕ となっていて, 積分値が p だけではなく ϕ にも依存している場合を不完全楕円積分と呼ぶ.

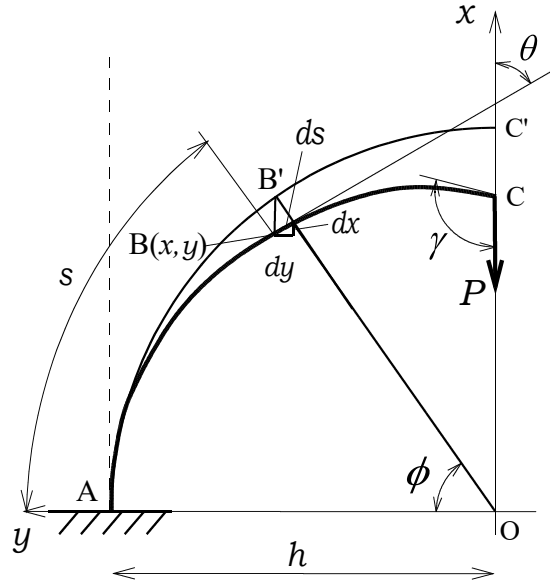


図 1.3

1.3 垂直方向の荷重を受ける柱

下端が固定され、先端で荷重 P を受ける柱を考えよう。その柱が十分に「しなやか」ならば図 1.3 のような変形をするだろう。曲げ剛性 EI は一定とし、以下での議論ではこの仮定が成り立つものとする。

点 $B(x, y)$ における荷重 P による曲げモーメントは、 $M = -Py = EI/r$ と表されるので

$$y = -\frac{EI}{Pr} = -\frac{1}{k^2 r} \quad (1.3)$$

となる。ここで、 $k = (P/EI)^{\frac{1}{2}}$ であり、 r は曲率半径である。 $1/r$ に関する厳密な式を用いると、

$$y = -\frac{d^2 y/dx^2}{k^2 [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \quad (1.4)$$

を得る。この式の両辺に dy/dx を乗じて x に関して積分すると、式 (1.4) は

$$y^2 = \frac{2}{k^2 [1 + (dy/dx)^2]^{\frac{1}{2}}} + C \quad (1.5)$$

となる。図 1.3 より $dx/ds = \cos \theta$ であり、したがって $[1 + (dy/dx)^2]^{\frac{1}{2}} = 1/\cos \theta$ となるから、式 (1.5) は

$$y^2 = \frac{2}{k^2} \cos \theta + C = \frac{2}{k^2} [1 - 2\sin^2(\theta/2)] + C \quad (1.6)$$

と簡単になる。さらに、定数

$$h^2 = \frac{2}{k^2} + C \quad (1.7)$$

を導入すると

$$y^2 = h^2 - \frac{4}{k^2} \sin^2(\theta/2) \quad (1.8)$$

となる。

固定端 A では $\theta = 0$ なので、 $y = h = AO$ となる。また、 y^2 は正であるため、式 (1.8) の解は h と k の相対的な大きさに依存する。

はじめに、 $h^2 < 4/k^2$ と仮定する。そこで

$$h^2 = 4p^2/k^2 \quad (1.9)$$

を導入する。ここで、 $p < 1$ であり、 ϕ を

$$\sin(\theta/2) = p \sin \phi \quad (1.10)$$

を満たすように選ぶ。すると、式 (1.8) は

$$y = h \cos \phi \quad (1.11)$$

と変形される。

$dy/d\phi = -h \sin \phi$, $dy/ds = \sin \theta$ に注意して微小長さ ds を求めると、

$$ds = -\frac{hd\phi}{2p(1-p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{d\phi}{k(1-p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.12)$$

を得る。ここで、図 1.3 に示すように θ は負であり、したがって ϕ も負となる。式 (1.12) の負号は、 s が増えると ϕ が減少することを意味している。 ds に関して 0 から s まで積分し、負号を無視すると

$$s = \frac{1}{k} \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1-p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{k} F(p, \phi) \quad (1.13)$$

となる。この式には未知量である p および ϕ が含まれている。この式中の母数 p は、曲げ変形を生じても柱の長さが変わらないという仮定から計算できる。すなわち

$$L = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1-p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{k} K(p) \quad (1.14)$$

という関係である。ここで、積分範囲は図 1.3 の第 1 象限において、 ϕ が AO から C'O まで掃き出すように選ばれる。また、式 (1.10) より

$$p = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin \phi}$$

であるから、点 C における傾きは

$$\sin(\gamma/2) = p \quad (1.15)$$

と求められる。

この式は、柱のたわみを決定する母数 p と端部のたわみ角 γ との基本的な関係を示している。式 (1.14) から p が決まり、点 B におけるたわみ角が s の関数として決定される。式 (1.13) を ϕ について解いたのち、式 (1.10) から θ が得られる。楕円関数を用いると点 B における接線の角と AB の弧長の関係は

$$\sin(\theta/2) = p \operatorname{sn} ks \quad (1.16)$$

と求められる。ここで、 sn の係数は p である。柱の水平方向のたわみは

$$AO = h = 2p/k$$

であり、点 B の y 座標は

$$y = \frac{2p \cos \phi}{k} = \frac{2p}{k} \operatorname{cn} ks \quad (1.17)$$

であり、点 B における曲げモーメントは、

$$M = -yP = -2pkEI \operatorname{cn} ks \quad (1.18)$$

となる。

次に点 B の垂直座標を考える。

$$dx = ds \cos \theta = ds(1 - 2p^2 \sin^2 \phi) \quad (1.19)$$

に注意し、式 (1.12) から得られる ds を式 (1.19) に代入すると

$$dx = \frac{(1 - 2p^2 \sin^2 \phi) d\phi}{k(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

となり、これを積分して、

$$x = \frac{1}{k} \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2p^2}{k} \int_0^\phi \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

を得る。上式の右辺の 2 番目の積分項は

$$[F(p, \phi) - E(p, \phi)]/p^2$$

に等しい。そこで、点 B の垂直変位は

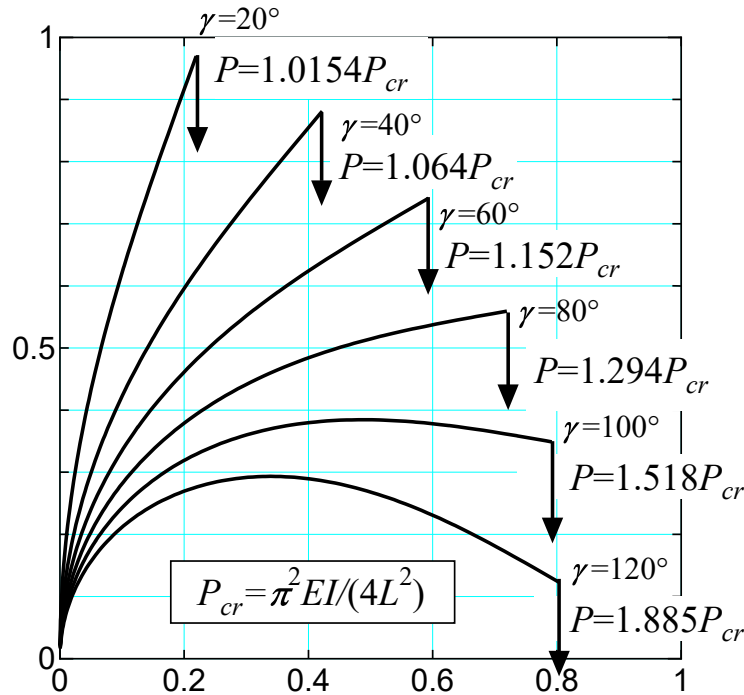
$$x = 2E(p, \phi)/k - F(p, \phi)/k \quad (1.20)$$

と求められる。

式 (1.20) の積分項の上限に $\pi/2$ を代入すれば、たわみ CO に関して

$$v = 2E(p)/k - L \quad (1.21)$$

と得られる。



付図 1

ここまで説明したように、柱の変形の解析の第一歩は p を計算することである。そして変形後の任意点の位置は、式 (1.13), (1.11) および (1.20) を解くことによって求められる*4。

図 1.3 に示すような変形を引き起こすのに必要な力は

$$P = EIK^2(p)/L^2 = 4P_{cr}K^2(p)/\pi^2$$

となる。ここで、 $P_{cr} = \pi^2 EI / (4L^2)$ であり、**Euler** の座屈荷重 (Euler's critical load) である。

もしも、図 1.4(a) に示すような A に関して上下対称な柱 ABC の変形を考えるとすれば、図 1.4(b) のような両端に荷重 P を受ける長さ $2L$ の棒 CD の変形形状を得る。また変曲点 (point of contraflexure) C, D で同様の棒をつなぎ合わせるとするなら、図 1.4(a), (c) に示す波状エラスティカ (undulating elastica) と呼ばれる一連の弾性曲線を得る。しかしその 2 つのなかで、図 1.4(c) だけが安定である。

図 1.3 において荷重 P を次第に増加すると、垂直変位や水平変位が増大する。しかし、点 C の水平変位の最大点をとる荷重 P が存在するに違いない。荷重をこの値以上に増やすと点 C は引き込まれるようになる。

*4 訳注：実際には、1) 式 (1.15) の γ に任意の値を与えて p を求める、2) この p を用いて式 (1.14) より無次元荷重 kL を求める、3) 以上で得られた p, kL を用いて、式 (1.17) および式 (1.20) をもとに、 ϕ を $0 \sim \pi/2$ まで変化させて無次元座標 $x/L, y/L$ を求める、という計算手順が簡単である。すなわち、柱の先端のたわみ角 γ に任意の値を与え、その後に無次元荷重 kL を求めて変形座標を計算するという手順である。この方法によって求めた柱の変形図を付図 1 に示す。

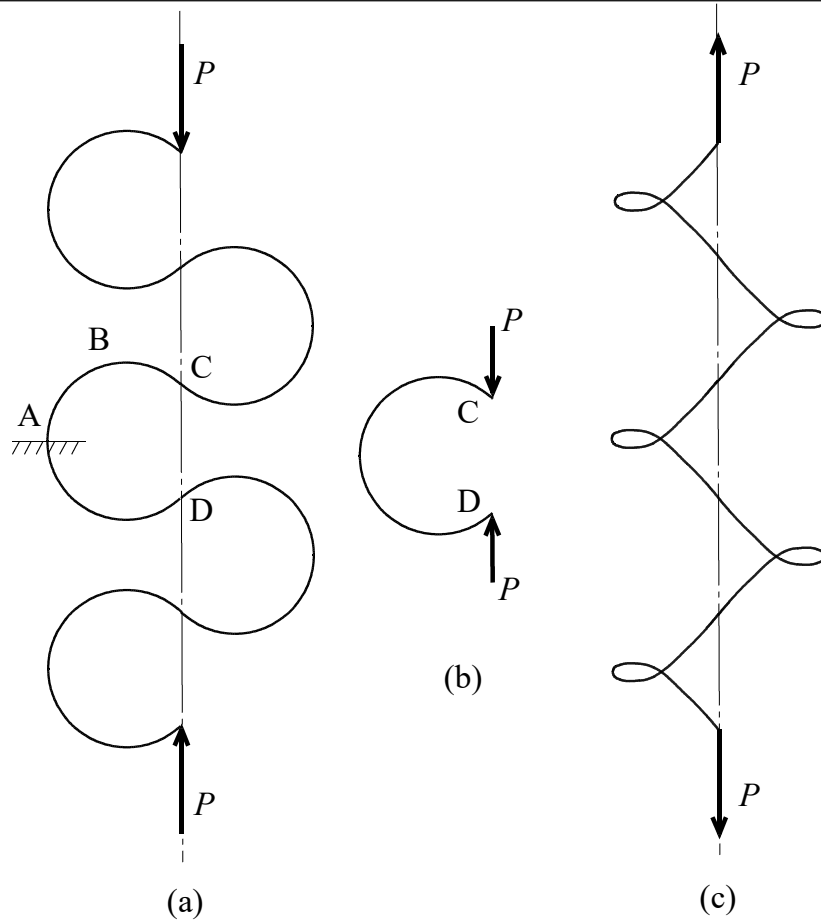


図 1.4

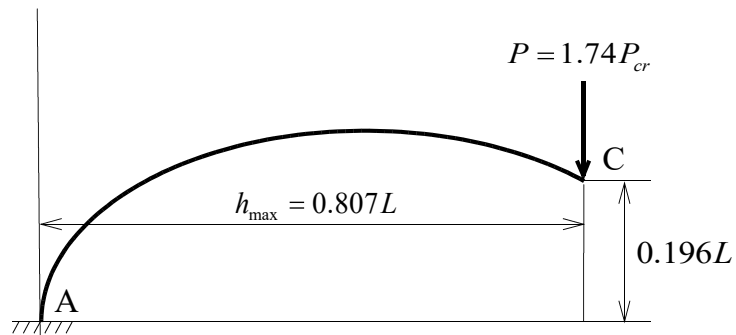


図 1.5

この荷重 P を求めるために、図 1.5 に示すように h/L は最大値をとらねばならない。そこで

$$h/L = 2p/K(p) \equiv \zeta(p), \quad d[\zeta(p)]/dp = [2K(p) - 2pK'(p)]/K^2(p)$$

となるので、 h/L が最大値となるには

$$K(p) = pK'(p) = B(p)p^2/(1 - p^2)$$

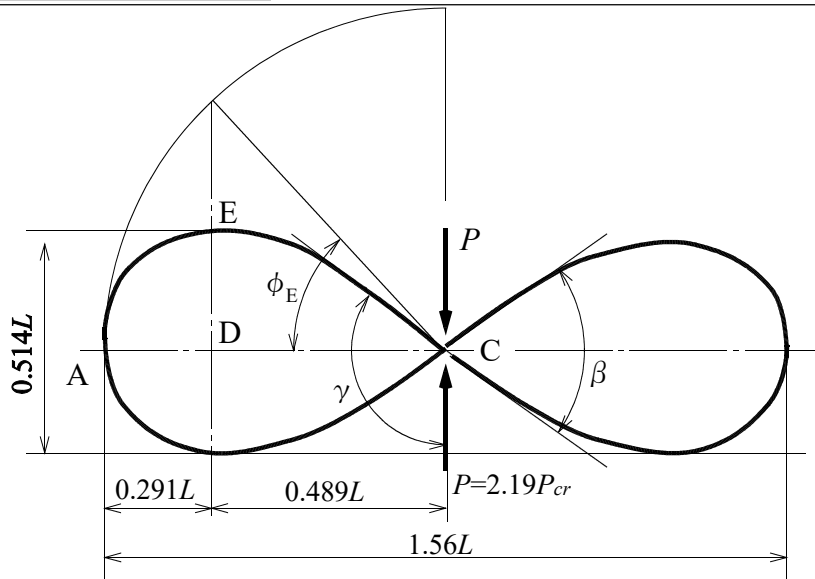


図 1.6

という関係が必要である。ここで、

$$B(p) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \phi \, d\phi}{(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

である。この条件式は、 $p = 0.837$ のときに満たされ、したがって $h_{\max} = 0.807L$ であり、 $P = 1.74P_{cr}$ のときに最大値を得る。

長さ $4L$ の針金が、図 1.6 のような弾性変形状のように曲げられた場合を考える。その針金のつり合い状態を保っているときの形状や力を求めるためには、

$$v = 2E(p)/k - L = 0$$

と考えればよい。この方程式を解けば $p = 0.908$ となり、したがって $h = 0.78L$ 、および $P = 2.19P_{cr}$ を得る。長さ DE を求めるには、点 E で $\theta = \pi/2$ に注意すればよく

$$\sin \phi_E = \frac{\sin(\pi/4)}{p} = 0.779$$

を得る。また、この結果を式 (1.11) および式 (1.20) に当てはめると $CD=0.489L$ 、 $ED=0.257L$ となる。

1.4 無限長の棒

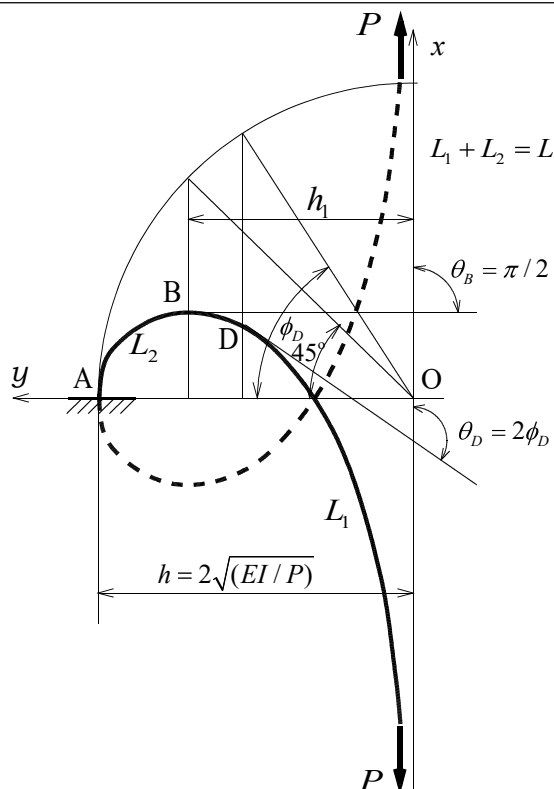


図 1.7

前節では、 $h^2 < 4/k^2$ の仮定のもとで弾性棒の変形を調べた。もしも、 $h^2 = 4/k^2$ ，すなわち $p = 1$ が成立するとすれば、式 (1.14) より

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - \sin^2 \phi)^{1/2}} = \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \sec \phi \, d\phi \\ &= \frac{1}{k} [\ln \tan(\pi/2) - \ln \tan(\pi/4)] = \infty \end{aligned} \quad (1.22)$$

また、式 (1.9) から

$$h = 2/k = 2\sqrt{EI/P} \quad (\text{有限値}) \quad (1.23)$$

となり、また、 $v = 2E(p)/k - L = -\infty$ を得る。同様な考察をすると

$$s = \frac{1}{k} \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\cos \phi} = \frac{1}{k} \ln \tan(\phi/2 + \pi/4) = \frac{1}{k} (\lambda\phi)$$

したがって、たわみ角と弾性棒の長さの関係は、 $\phi = \theta/2 = \text{gd } ks$ となる。

ここで、 $\lambda(\phi)$ はラムダ関数 (Lambda function) であり、その逆関数である $\text{gd } ks$ は ks を引数とするグーデルマン関数 (Gudermann function) である。この2つの関数については、読者は応用解析学の教科書、たとえば Hancock の教科書を参照されたい⁽¹³⁾ *5.

*5 訳注：グーデルマン関数は $\text{gd } x = \int_0^x \frac{dt}{\cosh t} = \arcsin(\tanh x)$ で定義される。また、グーデルマン関

$\phi = \theta/2$ で表された点の垂直座標を求めるために、波形エラスティカについて誘導した式において、 $p = 1$ とおくと、

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{k} \int_0^\phi \frac{d\phi}{\cos \phi} - \frac{2}{k} \int_0^\phi \frac{\sin^2 \phi}{\cos \phi} d\phi \\ &= \frac{2 \sin \phi}{k} - \frac{\ln \tan(\phi/2 + \pi/4)}{k} \end{aligned}$$

を得る。

ϕ が $\pi/2$ に近づくと θ は π になり、それゆえ v は ∞ に近づく。このことは、図 1.7 の輪から 2 つの分岐が垂直軸に漸近することを示している。この場合に物理的に重要なことは、棒が無限に長いにもかかわらず有限な水平変位が生じていることである。

1.5 ノーダルエラスティカ

もしも、式 (1.8) において $h \leq 2/k$ なら、 x のある値で y はゼロになるだろう ($h = 2/k$ のときに $x = \pm\infty$ で y がゼロになっているため)。 $y = -1/(k^2 r)$ という関係式 (1.3) から曲率は y の増加とともにゼロになることがわかるから、変形曲線が x 軸を横切るときはいつも変曲点が生じることは明らかである。一方で、 $h > 2/k$ のときには、 y と曲率はゼロになることはない。別な言い方をすれば変曲点は生じないともいえる。

まず、

$$4/k^2 = h^2 p^2, \quad (p^2 < 1)$$

とおく。したがって、式 (1.8) より

$$y = h [1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}} \quad (1.24)$$

$p^2 < 1$ なので、 θ の任意の実数値に対して、 y はある一定値を持つ。次の関係、すなわち

$$\sin \phi = p \sin(\theta/2) \quad (1.25)$$

を満たすパラメータ ϕ を導入すると、式 (1.24) は

$$y = h \cos \phi \quad (1.26)$$

となる。

また、

$$\frac{dy}{d\theta} = - \frac{hp^2 \sin \theta}{4 [1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}}$$

数の逆関数（一般には逆グーデルマン関数又はランベルト関数と呼ばれる。ここでは、このグーデルマン関数の逆関数をラムダ関数と称している）は、区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ において、次のように与えられる。

$$\lambda(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos t} = \ln \tan(\pi/4 + x/2).$$

および

$$\sin \theta = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds}$$

の関係を用いて、

$$ds = -\frac{hp^2 d(\theta/2)}{2[1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}}$$

を得る。したがって、弧長は

$$s = -\frac{hp^2}{2} \int_0^{\theta/2} \frac{d(\theta/2)}{[1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}} = -hp^2 F(p, \theta/2)/2 \quad (1.27)$$

となる。ここで、負号は、固定端から自由端に進むにつれて θ は減少することによる。したがって以下の議論では、 s は正をとる。

x を求めるために、以下の関係式に着目する。

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta ds = [1 - 2 \sin^2(\theta/2)] ds \\ &= \frac{hp^2 d(\theta/2)}{2[1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}} - \frac{hp^2 \sin^2(\theta/2) d(\theta/2)}{[1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(ここで、 ds の負の符号は省略している。) この式を積分すると

$$\begin{aligned} x &= hp^2 F(p, \theta/2)/2 - hp^2 \int_0^{\theta/2} \frac{\sin^2(\theta/2) d(\theta/2)}{[1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= hE(p, \theta/2) - h(1 - p^2/2)F(p, \theta/2) \end{aligned} \quad (1.28)$$

を得る。

式 (1.24) から、 $y_{\max} = h$, $y_{\min} = (1 - p^2)^{\frac{1}{2}}$ となること、そして、 y_{\min} は $\theta = \pi$ で生じることがわかる。また、 y_{\max} , y_{\min} とともに同符号だから y がゼロになることはない。したがって、荷重 P は直接はりに作用させることはできない。なぜなら、そのような P が作用すれば、 $y = 0$ となるからである。そこで、このような荷重状態は、モーメント $Ph \cos \phi$ と荷重 P が作用する剛体棒を通じてのみ実現できる。この様子を図 1.8 に示す。

このときの弾性変形形状をノードルエラスティカ (nodal elastica) (または結節エラスティカ) と呼ぶ。図 1.8 は ϕ が $\pi/2$ に達しないことを示している。したがって完全楕円積分を用いることはない。はりの長さ s および M , P が与えられたなら、式 (1.24) より

$$e = y = 2[1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}/(pk)$$

となる。ここで、 $e = M/P$ である。この式と式 (1.27) とを組み合わせると、 p と θ を未知数とする方程式を得ることになる。しかし、まだ曖昧な場合が残っている。図 1.8 において、剛体レバーが (b), (c) の位置にあるときの曲げモーメントが同じならば、点 C および点 D におけるたわみ角は、それぞれ $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ である。これらの値を

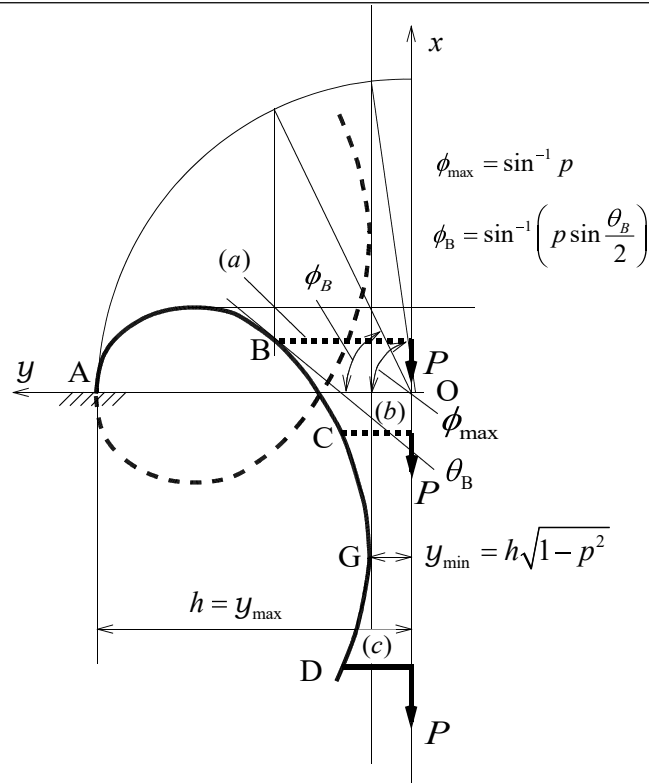


図 1.8

式 (1.24) に代入すると、両方の場合ともに $\sin^2(\theta/2)$ は同じ値を持つ. 図 1.8 の長さ ABCG は, ノーダルエラストिकाの 1 周期の半分の長さであること, そしてその長さは, $L_\pi = hp^2F(p, \pi/2)/2 = pK(p)/k$ であることに留意しよう. 式 (1.27) は, 棒の長さが ABCG より短い場合のみに適用可能である. もしも, つり合い状態が変形状 ABCGD を必要とするなら, ノーダルエラストिकाを最大限に回転させたところまで追跡し, この長さから失っている部分を差し引く必要がある. したがって, 点 A から測ったノーダルエラストिकाの長さが $L_{2\pi} = 2pK(p)/k$ であるから

$$L = ABCGD = L_{2\pi} - hp^2F(p, \theta_D/2)/2 \tag{1.29}$$

となる.

図 1.8 に示した 3 通りの荷重位置のどれもが, はりを AB, ABC および ACBCD の重なる位置に保つことができることに留意すべきである. さらに, はりが (a) の位置 (図 1.8 参照) でつり合いを保つかどうかを前もって誰も予測することができない. したがって, 力および曲げモーメントを受けるはりの解の正しい式を求めるには, 試行錯誤法によるしかない. また, 正しい解は, p が実数の場合のみである.

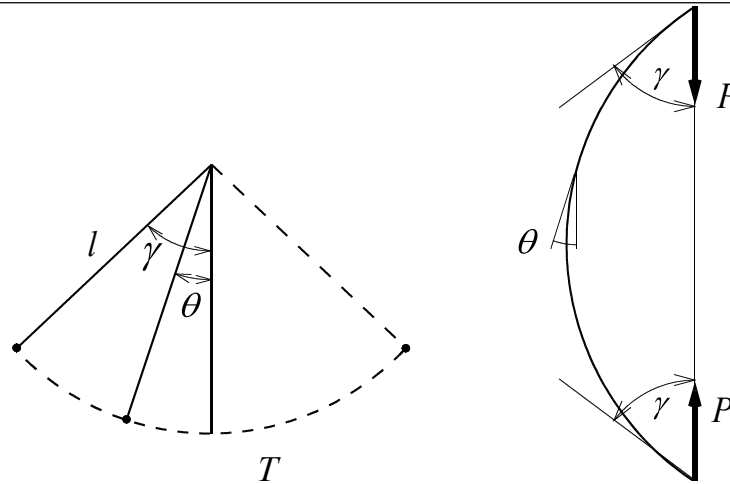


図 1.9

曲げモーメントについては

$$\begin{aligned}\theta/2 &= \text{am}(ks/p), \\ \sin(\theta/2) &= \text{sn}(ks/p), \\ \cos(\phi) &= [1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}} = \text{dn}(ks/p)\end{aligned}$$

より

$$\frac{M}{EI} = \frac{Ph \cos \phi}{EI} = \frac{2k}{p} \text{dn}(ks/p)$$

を得る.

1.6 キルヒホッフの運動的類似. 振り子

図 1.3 に示した柱の任意点 (x, y) における曲げモーメントについては,

$$EI \frac{d\theta}{ds} + Py = 0$$

あるいは, $k = \sqrt{P/EI}$ として

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + k^2 \sin \theta = 0 \quad (1.30)$$

という微分方程式を得た.

さて, 図 1.9 に示した単振り子 (simple pendulum) を考えると, その運動は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1.31)$$

で表される. 式 (1.30) と式 (1.31) は形式的に同一である. このことは最初に Kirchhoff によって指摘され, キルヒホッフの運動的類似 (Kirchhoff's kinetic analogy) と呼ばれている⁽¹⁴⁾. この理論に従えば, エラスティカのたわみ角は, 重力の作用のもとで振り子が左右に振動するときの振れ角と同じである.

単振り子と細長い弾性棒の変形とを比較するために, 長さが l で重さを無視できる棒を考えよう. この棒は一端からつり下げられ, 他端には重りが取り付けられているものとする. この振り子は重力を受けて自由に動く. 時刻 t における速度を v とし, θ を垂線と棒のなす角とする (図 1.9 参照). 重りを静止状態から速度 v_0 で押し出すものとする

$$(v)_{t=0} = v_0, \quad (\theta)_{t=0} = 0$$

となる.

運動エネルギーと位置エネルギーとは等しいから

$$(v_0^2 - v^2)/2 = gl(1 - \cos \theta)$$

すなわち

$$v^2 = v_0^2 - 4gl \sin^2(\theta/2) \quad (1.32)$$

$v = l d\theta/dt$ に留意し, $\omega^2 = g/l$ とおくと, 式 (1.32) は

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 4\omega^2 \left(\frac{v_0^2}{4gl} - \sin^2(\theta/2)\right) \quad (1.33)$$

となる. この非線形方程式の解は, v_0^2 と $4gl$ の大きさの比に依存している.

重りの質量を m とすると, 位置エネルギーの最大値は $2mgl$ である. もしも

$$mv_0^2/2 < 2mgl$$

すなわち

$$v_0^2 < 4gl$$

ならば, 重りは高さ $2l$ には届かずに振動する. また, $p^2 = v_0^2/(4gl)$ とおけば $p^2 < 1$ となり, 振り子の振幅を γ とおけば, 境界条件は $(v)_{\theta=\gamma} = 0$ と表される. 式 (2.32) の θ や v にこれらの式を用いると

$$p^2 = v_0^2/(4gl) = \sin^2(\gamma/2)$$

と表される.

$d\theta/dt$ は $\theta = \pm\gamma$ の位置で符号を変えるから, 式 (1.33) より

$$\omega dt = \pm \frac{d\theta}{2[p^2 - \sin^2(\theta/2)]^{1/2}} \quad (1.34)$$

となる。次に、 $\sin(\theta/2) = p \sin \phi = \sin(\gamma/2) \sin \phi$ とおく。そうすると、 θ が $+\gamma$ から $-\gamma$ に変化するとき、 ϕ は $+\pi/2$ から $-\pi/2$ の間を振動する。 t を ϕ の関数として表して式 (1.34) を整理すると

$$\omega dt = \pm \frac{p \cos \phi d\phi}{\cos(\theta/2)(p^2 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{d\phi}{(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.35)$$

を得る。また、ヤコビの楕円関数を用いると

$$\left. \begin{aligned} \sin \phi &= \operatorname{sn} \omega t, \\ \sin(\theta/2) &= p \operatorname{sn} \omega t, \\ d\theta/dt &= \pm 2p\omega \operatorname{cn} \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

と表される。ここで、楕円関数の母数は p である。

振幅が $\theta = 0$ から $\theta = \gamma$ まで、そしてその後 $-\gamma$ まで振れ、 $\theta = 0$ に戻るのに要する時間が周期 T となる。これより

$$\omega T = 4\omega \int dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}$$

すなわち

$$T = 4K(p)/\omega \quad (1.37)$$

となる。 γ が小さければ ($\gamma = 0^\circ \sim 5^\circ$) $K \approx \pi/2$ となり、振幅の小さい場合の周期は

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.38)$$

となる。

式 (1.36) および式 (1.37) を式 (1.16) および (1.14) と比較すると、 $L = T/4$, $k = \omega$ と置くとそれらは同一の式となる。また、振り子に対する t は、波状エラストイカの s と同じ意味を持っている。さらに、図 1.9 における 2 つの γ が等しければ、振り子と柱の係数が同一になることがわかる。式 (1.14) および式 (1.37) の相似性を図 1.10 に示す。 L を図 1.10(b) の柱 AB の長さとし、 $T = 2\pi(l/g)^{\frac{1}{2}}$ を図 1.10(a) の振り子が微小振幅で振れるときの周期とすると

$$L : L_1 : L_2 : L_3 : \dots = T : T_1 : T_2 : T_3 : \dots$$

が成り立つことがわかる。ここで、 L_1, L_2, \dots , は点 A および点 B で支持され、端点における傾斜角 $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, を持つ細長い棒の長さである。また、 T_1, T_2, \dots , は振幅 $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, を持つ振り子の周期である。

さらに初速 v_0 を増やすと、重りの運動エネルギーが位置エネルギー $2mgl$ に等しい段階に達する。これは

$$v_0^2 = 4gl \quad \text{あるいは、} \quad p^2 = v_0^2/(4gl) = 1$$

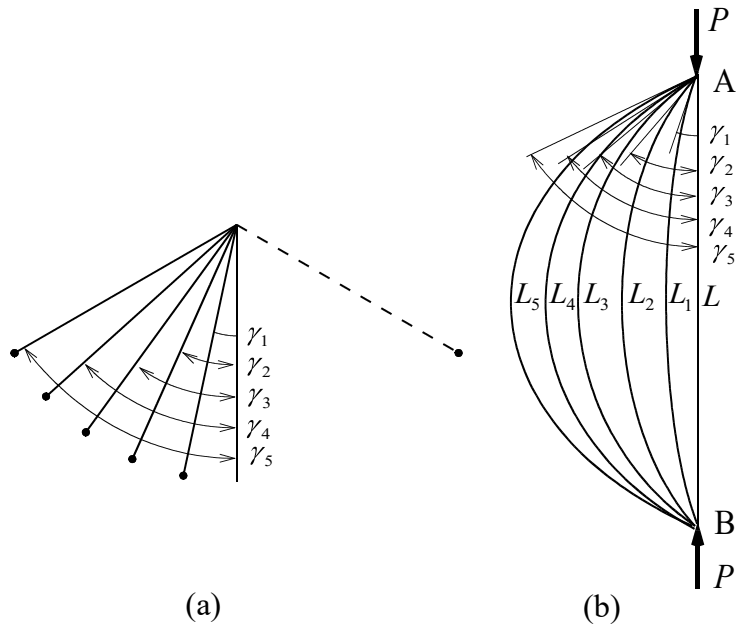


図 1.10

のときに生じる. 式 (1.37) で $p = 1$ を代入すると

$$T = 4[\ln \tan(\pi/2) - \ln \tan(\pi/4)]/\omega = \infty \quad (1.39)$$

このため, 棒は決して垂直位置に到達することはない. このときの角速度は, $\omega = d\theta/dt = 2\omega \operatorname{sech} \omega t = 2\omega(1/\sinh \omega t)$ となる. 関数 $y = \operatorname{sech} \omega t$ は時間 t の増加とともに減少して, 最終的には t 軸に漸近する. 換言すれば, 無限時間経過すると角速度はゼロになるとも言える.

さらに v_0 を大きくすると振り子は回転するようになる. この場合には,

$$\left. \begin{aligned} T &= 2pK(p)/\omega, \\ \theta/2 &= \operatorname{am}(\omega t/p), \\ \omega &= d\theta/dt = +2\omega \operatorname{dn}(\omega t/p)/p \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

となる. これらの結果は

$$p^2 = 4gl/v_0^2 < 1$$

のときに得られる.

この式から v_0^2 が無限に大きくなると p はゼロになることがわかる. $p = 0$ のとき dn は 1 となるから, 振り子は $2\omega/p$ の速さで無限大に近づく. しかし, p が小さな値の場合には dn はほぼ 1 となるから, 振り子は一定の速さで振れ, その周期は

$$T = \pi p(l/g)^{\frac{1}{2}} \quad (1.41)$$

となる.

表 1.1 エラスティカと振り子の比較

エラスティカ		振り子	
波状	$\phi = \text{am } ks$ $\sin(\theta/2) = p \text{ sn } ks$ $M/EI = 2pk \text{ cn } ks$ $L = K(p)/k$	振動	$\phi = \text{am } \omega t$ $\sin(\theta/2) = p \text{ sn } \omega t$ $\omega = d\theta/dt = \pm 2p\omega \text{ cn } \omega t$ $T = 4K(p)/\omega$
無限長棒	$\phi = \text{gd } ks$ $\sin(\theta/2) = \tanh ks$ $M/EI = 2k \text{ sech } ks$ $L = \infty$	$v_0^2 = 4gl$	$\phi = \text{gd } \omega t$ $\sin(\theta/2) = \tanh \omega t$ $\omega = d\theta/dt = 2\omega \text{ sech } \omega t$ $T = \infty$
ノーダル	$\theta/2 = \text{am}(ks/p)$ $\sin(\theta/2) = \text{sn}(ks/p)$ $M/EI = (2k/p) \text{ dn}(ks/p)$ $L_{2\pi} = (2p/k)K(p)$	回転	$\theta/2 = \text{am}(\omega t/p)$ $\sin(\theta/2) = \text{sn}(\omega t/p)$ $\omega = d\theta/dt = (2\omega/p) \text{ dn}(\omega t/p)$ $T_{2\pi} = (2p/\omega)K(p)$

弾性棒と振り子についての3種類の類似性を表 1.1 に示す。ノーダルエラスティカの長さ $L_{2\pi}$ は、棒の完全な回転を表す。同じく周期 $T_{2\pi}$ は回転する振り子の周期を表す。無限長棒に対応する振り子は、振動も回転もしない。重りは最も低い位置から動き出し、無限大の時間を要して頂点の位置に達する。

1.7 圧縮力を受ける棒のたわみ⁽¹⁵⁾

座屈に関する線形理論によれば、図 1.11 に示す柱は、 $P < P_{cr}$ なら真直ぐなままであり、 $P > P_{cr}$ のときには、小さなたわみ δ が生じるがその大きさは未知である。 $P > P_{cr}$ の場合には線形理論では解が求められない。

しかしながら、実験結果は、荷重が臨界荷重 (critical load, $P_{cr} = \pi^2 EI/l^2$)、または座屈荷重を超えても細長い柱には横方向にある一定の大きさのたわみが生じていることを示している。以下、変位 δ を荷重 P によって表す式を求めよう。任意位置 s におけるたわみ y を s の関数、すなわち $y = f(s)$ と表わす。この式を s で2階微分すると

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = -k^2 y \cos \phi \quad (1.42)$$

ここで、 ϕ は弾性曲線のたわみ角、 $k^2 = P/(EI)$ である。ここで以下の近似式

$$\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2, \quad \phi \approx \sin \phi = dy/ds = y'$$

を代入すると

$$y'' + k^2 y = k^2 (y')^2 y/2 \quad (1.43)$$

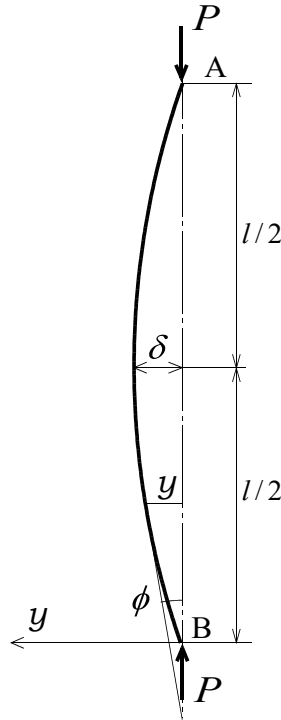


図 1.11

を得る．式 (1.43) の右辺は y の 3 次式となっているので， y の近似式としては十分である．ここで我々は線形理論を手がかりとし，

$$y = c \sin(\pi s/l) \quad (1.44)$$

をたわみを表す式と仮定する．境界条件を満たすためには， $(y)_{s=0} = 0$ ， $(y)_{s=l} = 0$ ， $\pi/l = k$ すなわち $P = P_{cr}$ でなければならない．しかしながら座屈後の形状では， P と P_{cr} にはわずかな相違があり，また π/l と k にも同様にわずかな相違がある．この違いを考慮して $\pi/l = k_0$ とおくと，式 (1.43) の右辺は

$$(c^3 k_0^4 \cos^2 k_0 s \times \sin k_0 s)/2 = c^3 k_0^4 (\sin k_0 s + \sin 3k_0 s)/8$$

となる．したがって，式 (1.43) は

$$y'' + k^2 y = c^3 k_0^4 (\sin k_0 s + \sin 3k_0 s)/8 \quad (1.45)$$

となる．これを解くと

$$y = c \sin k_0 s + c_1 \sin 3k_0 s \quad (1.46)$$

ここで，

$$c^2 = \frac{8(k^2 - k_0^2)}{k_0^4} = \frac{8l^2}{\pi^2} \left(\frac{P}{P_{cr}} - 1 \right), \quad c_1 = -\frac{k_0^2}{64} c^3$$

であり， c_1 は $k^2 \approx k_0^2$ と近似して得られる．

式 (1.46) から, δ は

$$\delta = (y)_{s=l/2} = c - c_1$$

と得られる. c を 1 次の微小量と仮定すれば c_1 は 3 次の微小量となるから, 十分な精度を持って

$$\delta = c = 0.900l \left(\frac{P}{P_{cr}} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.47)$$

とすることができる. したがって, もしも, $P = 1.01P_{cr}$ なら $\delta = 0.09l$, $P = 1.05P_{cr}$ なら $\delta = 0.20l$ となる.

式 (1.46) は, 座屈後の柱の変位が正弦曲線からどのようにそれるかを示している. 柱の両端に向かうにつれて, たわみはより小さくなる一方で, 柱の中央ではたわみは式 (1.44) で仮定したものよりも幾分大きくなる.

$P > P_{cr}$ のときの柱の横方向変位の解析については, 楕円積分を用いることもできる. 例えば, 図 1.3 を考える. 図 1.3 に示されたたわみを引き起こすのに必要な力は

$$P = EIK^2(p)/L^2 = 4P_{cr}K^2(p)/\pi^2 \quad (1.48)$$

となる. $K(p)$ は $\pi/2$ 以下の値はとり得ないので, 式 (1.48) は, 点 A で固定され垂線とは異なるたわみ曲線を得るには $P > P_{cr}$ でなければならないことを示している⁽¹⁶⁾.

$K(p)$ は以下のように p のべき乗で展開される.

$$K(p) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 p^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 p^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \right)^2 p^6 + \dots \right]$$

水平方向のたわみが小さいときには, γ と p ともに小さな値をとる. $K(p)$ の級数の最初の 2 項をとり, p を求めると

$$p = 2[2K(p)/\pi - 1]^{\frac{1}{2}}$$

となる. また, 柱の水平変位が $h = 2p/k$ であることを考慮すると, 式 (1.9) より

$$h = \frac{8L}{\pi} [\sqrt{(1/n)} - (1/n)]^{\frac{1}{2}} \quad (1.49)$$

を得る. ここで, $n = P/P_{cr}$ である. もしも, P が P_{cr} より僅かに大きい値であるとすると, $\Delta = n - 1$ として

$$h = \frac{8L}{\pi} \sqrt{(\Delta/2)} \quad (1.50)$$

となる.

式 (1.49) より, $(dn/dh)_{n=1} = 0$ であることがわかる. したがって, n と h の関係を示すたわみ曲線の接線は, $n = 1$ のときに h 軸に平行である. この関係を図 1.12 に示す.

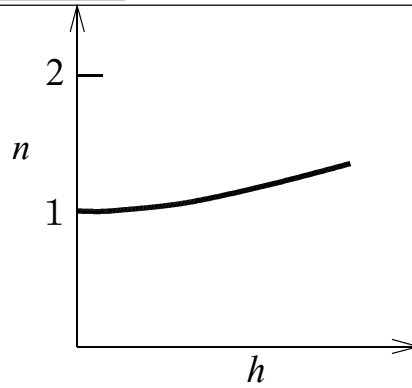


図 1.12

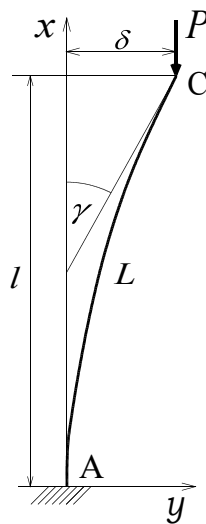


図 1.13

式 (1.50) を用いると,

$$\Delta = 0.001 \text{ に対して } h/L = 0.055$$

$$\Delta = 0.01 \text{ に対して } h/L = 0.17$$

となる。これらの結果は、 $K(p) \approx \pi/2 + \pi p^2/8$ という近似式に基づいている。 Δ がより大きくなると、この結果はもはや十分に正確とはならなくなる。なお、先端のたわみ角は

$$\gamma = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \delta \frac{\pi}{2l} \tag{1.51}$$

となる。

図 1.13 に示すように、はりの座屈理論ではたわみは $y = \delta[1 - \cos(\pi x/(2l))]$ により求められる。ここで、 δ ははりの先端における不静定 (statically indeterminate) たわみである。正確な水平たわみは

$$h = \frac{2p}{k} = 4L \frac{\sin(\gamma/2)}{\pi} = \gamma \frac{2L}{\pi} \tag{1.52}$$

である。ここで、 γ が小さければ、 $P = P_{cr}$, $l \approx L$ である。

座屈の近似理論では、 $y'' = 1/r$ を仮定し、 P_{cr} は柱をわずかに座屈した形状（これは不静定量である）を保つものと定義している。この横方向のたわみに対して確たる解を与られないこの理論の欠点は、 $1/r$ に対して厳密な表現をすることにより克服できる。座屈の近似理論の結果とは逆に、これまで荷重とたわみの間に一意の関係があることを示してきた。それゆえ、臨界荷重を得る判断基準について以下に述べる。

図 1.13 に示すように、曲がってもその形状を支えられる垂直な柱に荷重 P が負荷された場合を考える。 P をゆっくりと減少させると、柱はまっすぐに戻っていくだろう。その柱が元のまっすぐな形に戻ったとき、荷重 P は臨界荷重に等しい。換言すれば、 P_{cr} は、通常の設定である「下から」ではなく、「上から」得られる。「下から」である場合には、 P_{cr} では無限の数のつり合い位置（まっすぐな場合も含むが）が存在する。一方で、厳密な理論によれば、まっすぐな柱は、 P_{cr} に対する唯一の形であることになっている。もしも、荷重が臨界荷重よりも大きい ($P > P_{cr}$) 場合には、座屈の近似理論では、まっすぐな形が唯一のつり合いであると示すことができるが、そのつり合いは不安定である。しかし、厳密な理論では、 P のそれぞれの大きさに対して、一意な横方向のたわみを持つ安定なつり合い位置を得ることができる。

$P > P_{cr}$ なる荷重を負荷した際の柱の変形については、図 1.3 に示した。しかし、この変形形状は、変形する柱に対する唯一のたわみ形状ではない。Saalschuetz⁽¹⁷⁾ によれば、図 1.14 に示した柱のたわみ形状を支配する式は

$$\left. \begin{aligned} v &= [2E(p) - 2E(p, \phi_0) - K(p) + F(p, \phi_0)]/k, \\ h &= \frac{2p}{k} \cos \phi_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

である。ここで、 p と ϕ_0 は

$$\left. \begin{aligned} p \sin \phi_0 &= 0, \\ K(p) - F(p, \phi_0) &= kL \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

を満たす必要がある。

式 (1.54) によれば、 $p = 0$ か $\sin \phi_0$ のどちらかの解を得る。もしも、 $p = 0$ なら柱は変形しない。また、 $\sin \phi_0$ の解を考えれば、 $\phi_0 = 0$ か $\phi_0 = -n\pi$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) を得る。したがって、式 (1.53) および (1.54) は

$$\left. \begin{aligned} v &= [2(2n+1)E(p) - (2n+1)K(p)]/k, \\ h &= 2p/k, \\ kL &= (2n+1)K(p) \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

となる。 $K(p)$ の最小値は $p = 0$ のときに生じ、その大きさは $\pi/2$ である。もしも $p \neq 0$ の場合すなわち柱が変形する場合を考えると、式 (1.55) の第 3 式において、 $n = 1, 2, 3$, などと置いて p を求めることができる。図 1.14 に示したとおり、長さ L と曲げ剛性 EI

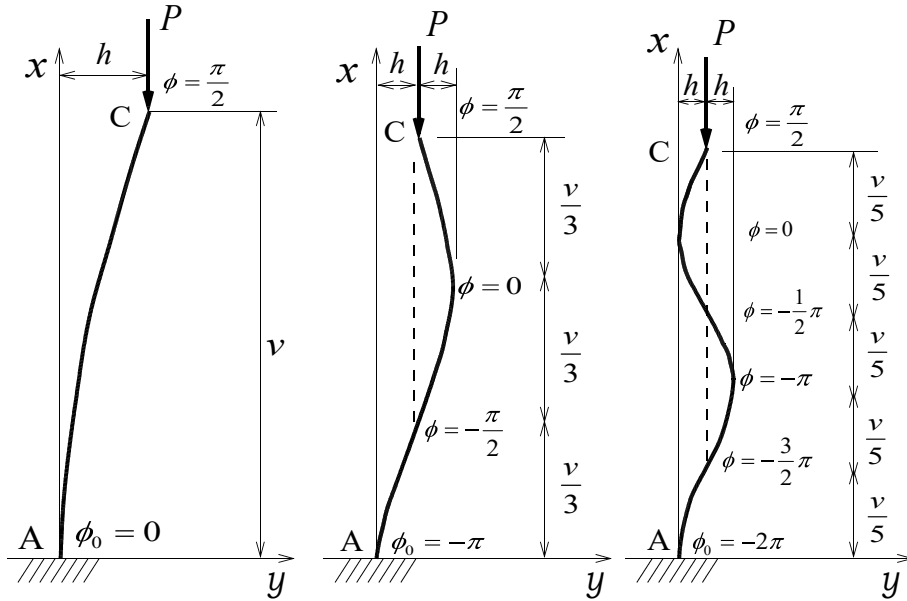


図 1.14

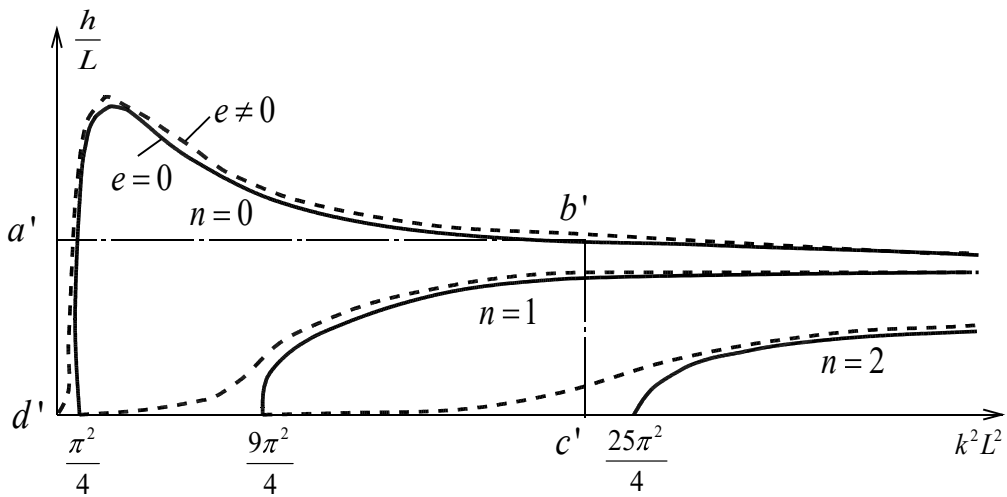


図 1.15 Malkin⁽¹⁸⁾ に基づく

を与えた柱は、その変形形状に応じて異なる荷重 P を支えることができる。柱の変形形状は

$$\left. \begin{aligned} x &= \{2E(p, \phi) - F(p, \phi) + 2n[2E(p) - K(p)]\} / k, \\ y &= \frac{2}{k} |p[(-1)^n - \cos \phi]| \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

によって求められる。ここで、 ϕ は $-n\pi$ から $+\pi/2$ まで変化する。

横方向の変位 h/L は、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対する $PL^2/(EI)$ の関数として表される⁽¹⁸⁾。この関数を、図 1.15 のグラフに示す。

図からわかるように、 $n = 0, 1, 2, \dots$ のすべての値に対して分岐が存在している。 $K(p)$ の性質から、異なる n に属する分岐は決して交わらない。というのも、 k や h (したがっ

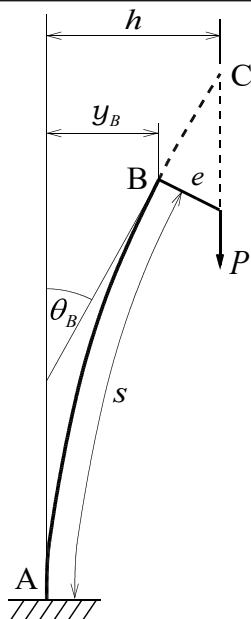


図 1.16

て p) が与えられると、関数 $K(p)$ は 2 つ以上の異なった値をとるからである。図に書き込まれた長方形 $a'b'c'd'$ は、横軸の値 $k^2 L^2$ に属する P による最大曲げモーメントに比例する。

1.8 柱への偏心負荷

荷重に偏心量を与えると、これまでに示した結果にどのようなそしてどれほどの影響を及ぼすかという問題を考えよう。荷重が柱に直接作用するのではなく、剛体棒を介して作用するとしても、柱の変形形状は変わらないことにまず留意しよう。この様子を図 1.16 に示す。この柱の解は

$$\left. \begin{aligned} ke &= \frac{2p \cos \phi_B}{1 - 2p^2 \sin^2 \phi_B}, \\ s &= F(p, \phi_B)/k \end{aligned} \right\} \quad (1.57)$$

に依存する。 e, s および P を与えると、式 (1.57) より p と ϕ_B が求められる。この柱の先端の横方向の変位は

$$y_B = 2p(1 - \cos \phi_B)/k$$

より求められる。通常は、偏心量が小さい場合に関心がある。もしも、 e が微小な量であれば、式 (1.57) から、 p や $\cos \phi_B$ のどちらかあるいは両方が微小量であることがわかる (19)。

もしも、 $p = \varepsilon$ (ここで、 ε は微小な正の数) なら、柱の先端変位は

$$y_B = e(1/\cos ks - 1)$$

である。このたわみ y_B と偏心量 e は同じオーダーの大きさである。

もしも、 $\phi_B = 2\delta$ （ここで 2δ は微小量）なら、

$$\begin{aligned} e &= [4\delta p / (1 - 2p^2)] / k, \\ s &= [K(p) - 2\delta(1 - p^2)^{-\frac{1}{2}}] / k, \\ y_B &= 2p(1 - 2\delta) / k \end{aligned}$$

となる。

最後に、もしも、 p と $\cos \phi_B$ とともに微小量 ($\varepsilon, 2\delta$) であれば、2次の微小項および高次項を省略して

$$e = 4\delta a / k, \quad s = (\pi/2 - 2\delta) / k, \quad y_B = 2\varepsilon(1 - 2\delta) / k$$

を得る。この場合には、 ϕ_B はほぼ $\pi/2$ となり、 y_B は ε のオーダーだが、 e に比べてまだ大きい。

図 1.15 の破線は、偏心量が小さい場合を示している。 $e = 0$ と $e \neq 0$ の差の最大値は臨界点近傍で生じることがはっきりと読み取れる。 P_{cr} を超えるとそれぞれの線はほとんど重なる。

1.9 曲げに基づく柱のひずみエネルギー

もともと真っ直ぐであった棒を半径 r の円形状に曲げたときにする仕事は

$$U = \frac{EI}{2r^2} L$$

である。直線から円弧へと曲げられた棒に蓄えられるひずみエネルギーを表すこの式は、剛体棒や弾性棒の両者に適用できる。というのも、両者ともに、曲げられている間は一定の曲げモーメントによって変形が生じているからである。しかし、曲げモーメントの代わりに力によって生み出されるひずみエネルギーの場合は話が変わってくる。この理由は、通常の解析では、曲げに基づくひずみエネルギーは

$$U = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx$$

であり、これは $y'' = 1/r$ に基づいているからである。

微小要素 ds が、直線状態から図 1.13 のように曲がった状態に変わる間に曲げモーメントによってなされる仕事は

$$dU = \frac{EI}{2r^2} ds$$

である。ここで、 $1/r$ は曲率を表す。式 (1.3) より、 $1/r = -yk^2$ であるから、 $dU = (y^2 Pk^2 / 2) ds$ となる。

波状エラストिका ($p < 1$) に対しては

$$dU = 2P \frac{p^2 \cos^2 \phi d\phi}{k(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.58)$$

であり、図 1.3 に示した区間 AB に蓄えられるひずみエネルギーは

$$U = \frac{2Pp^2}{k} \int_0^\phi \frac{\cos^2 \phi d\phi}{(1 - p^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2P}{k} [E(p, \phi) - (1 - p^2)F(p, \phi)] \quad (1.59)$$

となる。

$s = F(p, \phi)/k$ であり、かつ、式 (1.20) より $x = 2E(p, \phi)/k - s$ でもあるので式 (1.59) は

$$U = P[x + (2p^2 - 1)s] \quad (1.60)$$

と表される。

無限長棒の場合には、 $p = 1$ となることに留意してひずみエネルギーを考える。したがって式 (1.38) より

$$dU = \frac{2P}{k} \cos \phi d\phi$$

これより

$$U = \frac{2P}{k} \sin \phi = \frac{2P}{k} \tanh ks = P(x + s) \quad (1.61)$$

を得る。これが、点 A から測って s の長さを有する、図 1.7 に示した無限長棒に蓄えられるひずみエネルギーである。

ノーダルエラストिकाに蓄えられるひずみエネルギーは、以下のように計算される。

すなわち、微小長さ ds に蓄えられるひずみエネルギーは

$$dU = (Py^2 k^2 / 2) ds$$

である。また、微小長さは

$$ds = \frac{hp^2 d(\theta/2)}{2[1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}}}$$

と表されるから

$$dU = Ph[1 - p^2 \sin^2(\theta/2)]^{\frac{1}{2}} d(\theta/2)$$

したがって

$$U = PhE(p, \theta/2) = P[x + (2/p^2 - 1)s] \quad (1.62)$$

となる。なお、この結果の導出には、式 (1.27) および式 (1.28) を利用している。

一例として、長さ $4L$ の真直ぐな棒を考え、図 1.17 に示すように、3つの異なる変形形状に曲げられた場合を考えよう。大きな円では、曲げモーメント、せん断力そして軸力を伝達しうる（トルクは伝達し得ない）1つの節点で結びつけられている。この円を直径の

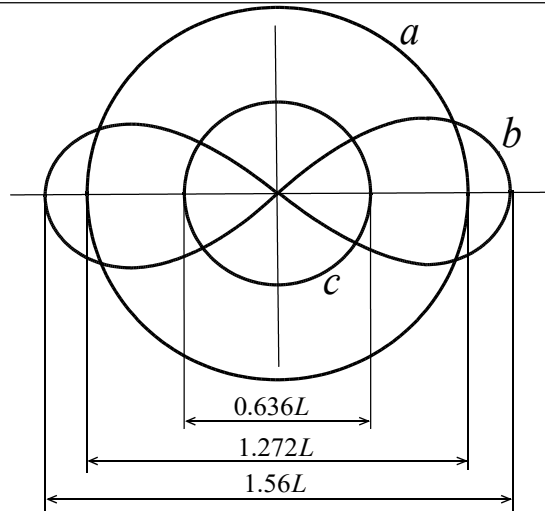


図 1.17

回りにねじると，図 1.17 に示す形状 (b) が得られる．端点が合致するまで (b) の形状を折り曲げるとすると，棒は形状 (c) のような二重円になるだろう（曲げに対する抵抗に比べてねじりへの抵抗は非常に小さいものと仮定する）．以上の 3 つの異なる変形状態に対するひずみエネルギーは，以下のように計算される．

大円のひずみエネルギーは

$$U_a = 2LP_{cr}$$

であり，小さな二重円のひずみエネルギーは

$$U_c = 8LP_{cr}, \quad \text{ここで, } P_{cr} = \pi^2 EI / (4L^2)$$

となる．

(b) については，このような特別な曲げ状態では， $p = 0.908$ ， $P = 2.19P_{cr}$ と，すでに 1.3 節で計算している．この値を波状エラスティカのひずみエネルギー式に代入して，

$$U_b = 5.65P_{cr}L$$

を得る．

したがって，変形状態 (a)，(b) および (c) のひずみエネルギーの比は $1 : 2\sqrt{2} : 4$ となる．なお， U_b を計算するときには，式 (1.59) の不完全楕円積分を $K(p)$ と $E(p)$ に置き換えて計算している．

1 章の参考文献

- (1) Euler, *Methodus Inveniendi Lineas Curvas*(1744).
- (2) Lagrange, *Sur la Force des Ressorts Pliés*, Mèm. Acad. Berlin(1770).

- (3) Plana, *Equation de la courbe fermée par une lame élastique*, Mem. R. Soc. Turin(1809).
- (4) McLachlan, N. W., *Ordinary Nonlinear Differential Equations in Engineering*, Clarendon Press, Oxford(1950).
- (5) Salvadori, M. G., and Schwarz, R. J., *Differential Equations in Engineering Problems*, p.324, Prentice-Hall, New York(1954).
- (6) Cayley, A., *Elliptic Functions*, G. Bell and Sons, London(1895).
- (7) Hancock, H., *Elliptic Integrals*, Wiley, New York(1917).
- (8) Bowman, F., *Introduction to Elliptic Functions*, English University Press, London(1953).
- (9) Milne-Thomson, L. M., *Jacobian Elliptic Functions*, Dover Publications.
- (10) Pearson, K., *Tables of the Complete and Incomplete Elliptic Integrals*, Cambridge University Press, London(1934).
- (11) Jahnke, E., and Emde, F., *Tables of Functions*, Dover Publications, New York(1945).
- (12) Jahnke, E., and Emde, F., *ibid.*
- (13) Hancock, H., *ibid.* p. 28.
- (14) Kirchhoff, G. R., On the equilibrium and the movements of an infinitely thin bar, *Crelles Journal*, 56(1859).
- (15) Mises, R., Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes, *Z. Angew. Math. Mech.*, 4, 5 (1924), p.435.
- (16) Frisch-Fay, R., On large deflections, *Aust. J. Appl. Sci.*, 10, 4 (1959), p.418.
- (17) Saalschuetz, *Der belastete Stab*, Teubner, Leipzig, 1880.
- (18) Malkin, I., Fomänderung eines axial gedruckten dünnen Stabes, *Z. Angew. Math Meth.*, 6(1926), p.73.
- (19) Malkin, I., *ibid.*

1 章の追加参考文献

- (20) Shoup, T. E., and McLarnan, C. W., On the use of the undulating elastica for the analysis of flexible link mechanisms, *ASME J. Eng. Ind.*, 93(1971), pp.263-267.
- (21) Shoup, T. E., On the use of the nodal elastica for the analysis of flexible link devices, *ASME J. Eng. Ind.*, 94(3)(1972), pp.871-875.
- (22) Levien, R., The elastica: a mathematical history, Technical Report No. UCB/EECS-2008-103, <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2008/EECS-2008-103.html> (2008), pp.1-27.

2章以降，6章後半まで省略

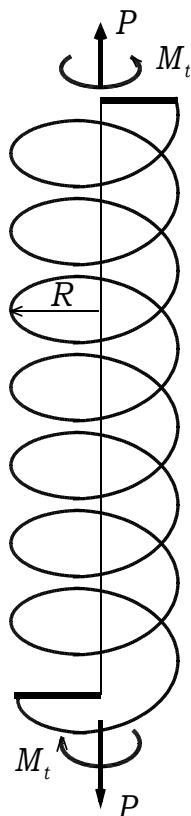


図 6.2

6.6 コイルばねの大変形

はじめに、コイルばねは長さ方向にわたって同一の曲げ剛性を有するものとして考える。その後、点 A においてこのばねを固定し、変形後の中心線は図 6.3 に示すようになっているものとする。すべての断面における軸力は θ に依存しているから、変形後の形状 ABC のばねのピッチは点ごとによって変化する。このことにより、ばねは曲げ剛性の変化する棒と等価となる。しかしながら、せん断力も存在し、たわみやすい棒の場合には、それが曲率へ及ぼす影響を無視することはできない。加えて、ピッチが変わるために ABC に沿ったせん断剛性も変化する。最後に、たわみやすい棒の解析が基本とする不伸長性 (inextensibility) はここでは仮定しない。というのも、負荷前後で、ばねの長さは大きく異なるからである⁽⁸⁾。

s , L および b を、荷重 P が作用したときの弧の長さ AB, 長さ ABC およびピッチとする。そして、 s_0 , L_0 および b_0 を負荷前のそれらの寸法とする。無負荷状態でのばねの軸、曲げおよびせん断剛性は、それぞれ

$$\mathbf{A}_0 = \frac{GIb_0}{\pi R^3}, \quad \mathbf{B}_0 = \frac{2EGIb_0}{\pi R(E + 2G)}, \quad \mathbf{C}_0 = \frac{EIb_0}{\pi R^3}$$

と表される。ここで、 R はコイルの半径、 I は素線の直径に関する断面 2 次モーメントである⁽⁹⁾。この式は、円形断面の素線から作られたコイルばねに適用できる。もしも、円

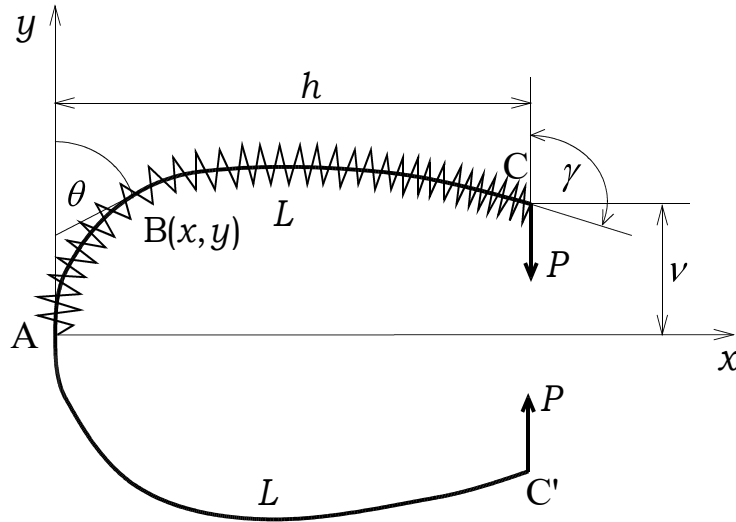


図 6.3

形以外の断面の場合には剛性の式に形状係数 (shape factor) を含める式になる⁽¹⁰⁾.

T , S および M をそれぞれ点 B における軸力, せん断力および曲げモーメントとすると

$$T = -P \cos \theta, \quad S = P \sin \theta, \quad M = P \int_s^L \sin \theta \, ds \quad (6.25)$$

と表される.

A , B および C を, ばねが荷重 P を受けているときの点 B の剛性とする. $T/A_0 = (b - b_0)/b_0$ より

$$\begin{aligned} A &= A_0 \frac{b}{b_0} = A_0 \left[1 - \frac{P}{A_0} \cos \theta \right], & B &= B_0 \frac{b}{b_0} = B_0 \left[1 - \frac{P}{A_0} \cos \theta \right], \\ C &= C_0 \frac{b}{b_0} = C_0 \left[1 - \frac{P}{A_0} \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (6.26)$$

を得る. この式から剛性は θ の関数となる. 変形したばねの軸の微分方程式は

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{B} + \frac{1}{C} \frac{dS}{ds} \quad (6.27)$$

である. この式 (6.27) に式 (6.25) と式 (6.26) を代入すると

$$(1 - \tau \cos \theta) \frac{d\theta}{d\sigma} = \beta \int_{\sigma}^1 \sin \theta \, d\sigma \quad (6.28)$$

を得る. ここで,

$$\sigma = \frac{s}{L}, \quad \lambda = \frac{P}{A_0}, \quad \beta = \frac{L^2 P}{B_0}, \quad \nu = \frac{P}{C_0}$$

であり, μ をポアソン比として

$$\lambda + \nu = \tau = \frac{\pi P R^3}{E I b_0} (3 + 2\mu)$$

である。式 (6.27) を σ に関して微分し、その後に積分すると

$$(1 - \tau \cos \theta)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 = \beta (2 \cos \theta - \tau \cos^2 \theta + H) \quad (6.29)$$

を得る。ここで、 H は積分定数である。境界条件から

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = L \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_{\theta=\gamma} = 0$$

となる。したがって

$$H = [(1 - \tau \cos \gamma)^2 - 1]/\tau$$

が導かれる。これより、式 (6.29) は

$$(1 - \cos \theta)^2 \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2 = \frac{\beta}{\tau} [(1 - \tau \cos \gamma)^2 - (1 - \tau \cos \theta)^2] \quad (6.30)$$

となる。一方、先の表記法から

$$\left(\frac{\tau}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R}{L} \left(\frac{3 + 2\mu}{2 + \mu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

であるので、

$$d\sigma = \sqrt{f} \frac{R}{L} \frac{(1 - \tau \cos \theta) d\theta}{[(1 - \tau \cos \gamma)^2 - (1 - \tau \cos \theta)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.31)$$

となる。ここで、

$$f = \frac{3 + 2\mu}{2 + \mu}$$

とする。

さて、

$$U(\theta) = (1 - \tau \cos \gamma)^2 - (1 - \tau \cos \theta)^2$$

とおくと、式 (6.31) は

$$ds = \sqrt{f} R \frac{(1 - \tau \cos \theta) d\theta}{[U(\theta)]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.32)$$

と表され、これを積分して

$$L = \sqrt{f} R \int_0^\gamma \frac{(1 - \tau \cos \theta) d\theta}{[U(\theta)]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.33)$$

を得る。さらに、 $\frac{b - b_0}{b_0} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{T}{\mathbf{A}_0}$ より、 $\frac{ds}{ds_0} = 1 - \lambda \cos \theta$ を得る。これより

$$L_0 = \sqrt{f} R \int_0^\gamma \frac{(1 - \tau \cos \theta) d\theta}{(1 - \lambda \cos \theta)[U(\theta)]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.34)$$

となり、この式から γ を得ることができる。

式 (6.34) を標準的な楕円積分で表すために $z = \cos \theta$ の関係を導入する. そうすると

$$d\theta = -\frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

であるから, 式 (6.34) は

$$L_0 = \sqrt{f} \frac{R}{\lambda \tau} \int_1^{\cos \gamma} \frac{(1-\tau z) dz}{(z-1/\lambda)[(z-1)(z+1)(z-\cos \gamma)(z+\cos \gamma-2/\tau)]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.35)$$

と変形される. この積分は, 第 3 種の楕円積分 (elliptic integral of the third kind) の形に変形できる⁽¹¹⁾.

γ を得るためのもう 1 つの方法は, 式 (6.33) の被積分項を級数に展開し項別積分をすることである. その結果は

$$\left. \begin{aligned} 2\sqrt{\beta} &= \pi(1-\tau)^{-\frac{1}{2}} S_1, \\ S_1 &= (1-\tau) + \frac{1}{4} \sin^2(\gamma/2) + \frac{1}{64} \frac{9-8\tau}{1-\tau} \sin^4(\gamma/2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

となる. 同様に式 (6.34) を級数展開すると

$$\left. \begin{aligned} L_0/L &= (1-\lambda)^{-1}(1-S_2/S_1), \\ S_2 &= \lambda \frac{1-\tau}{1-\lambda} \sin^2(\gamma/2) + \frac{\lambda}{8} \frac{(3-15\lambda+2\tau+10\lambda\tau)}{(1-\lambda)^2} \sin^4(\gamma/2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

を得る. 式 (6.36) と式 (6.37) の積を作ると

$$\left. \begin{aligned} 2\sqrt{\beta}(L_0/L) &= \pi(1-\lambda)^{-1}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}(S_1 - S_2) \\ \text{すなわち,} \\ \frac{2}{\pi\sqrt{f}} \frac{L_0}{R} [\tau(1-\tau)]^{\frac{1}{2}}(1-\lambda) &= S_1 - S_2 \\ &= (1-\tau) + a_1 \sin^2(\gamma/2) + a_2 \sin^4(\gamma/2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

となる. 式 (6.38) から γ は λ および τ のみに依存していることがわかる. これは

$$\left(\frac{\tau}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{R}{L} \sqrt{f}$$

という関係にあるからである. $S_1 - S_2$ の項において $\sin^4(\gamma/2)$ までの展開とすれば

$$\sin^2(\gamma/2) \approx \frac{-a_1 + (a_1^2 + 4a_0a_1)^{\frac{1}{2}}}{2a_2} \quad (6.39)$$

を得る. もし μ が与えられれば, $\lambda = c\tau$ の関係があるので a_0, a_1 および a_2 は τ だけに依存する. もしも $\mu = 0.3$ なら, $\lambda = 0.722\tau$, $\sqrt{f} = 1.25$ となる. これらの値を用いれば

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1.25} \frac{L_0}{R} [\tau(1-\tau)]^{\frac{1}{2}} (1-0.722\tau) - (1-\tau),$$

$$a_1 = \frac{1}{4} - 0.722\tau \frac{1-\tau}{1-0.722\tau},$$

$$a_2 = \frac{1}{64} \frac{9-8\tau}{1-\tau} - \frac{0.722}{8} \tau \frac{3-8.33\tau+7.22\tau^2}{(1-0.722\tau)^2}$$

を得る.

$\sin^2(\gamma/2)$ の計算を容易にするために, 図 6.4 にその図表を示す. この図より $\sin^2(\gamma/2)$ は $2L_0/R$ およびパラメーター $t = P/P_{cr}$ に依存していることがわかる. ここで P_{cr} は, 座屈時の臨界荷重 (critical load) である. この臨界荷重は式 (6.40) から計算される.

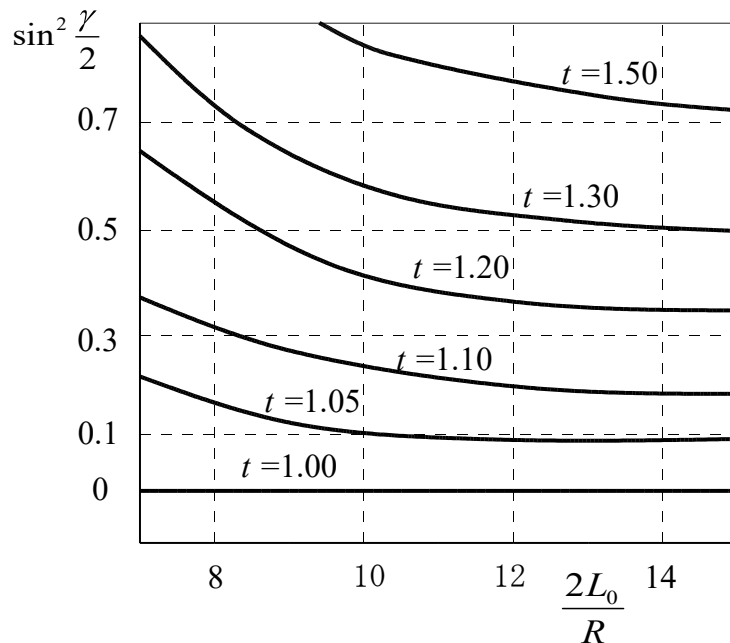


図 6.4 Mizuno⁽⁸⁾ による

$\gamma = 0$ のときは, コイルばねが载荷可能な荷重は座屈荷重 P_{cr} となる. したがって, $S_1 = 1 - \tau_{cr}$ および $2\sqrt{\beta_{cr}} = \pi(1 - \tau_{cr})^{1/2}$ となる. 少しの計算をすれば

$$\frac{1}{4\beta_{cr}/\pi^2 + \nu_{cr}} = \frac{1}{\lambda_{cr}} \left(\frac{1}{1 - \lambda_{cr}} - 1 \right)$$

を得る. また

$$\lambda_{cr} = \frac{P_{cr}}{\mathbf{A}_0}, \quad \beta_{cr} = \frac{P_{cr}}{\mathbf{B}_0} L_{cr}^2, \quad \nu_{cr} = \frac{P_{cr}}{\mathbf{C}_0},$$

さらに $L_{cr} = (1 - \lambda_{cr})L_0$ の関係から, この臨界荷重は

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \mathbf{B}_0}{L_{cr} L_0} \frac{1}{4 + \pi^2 \mathbf{B}_0 / (L_{cr}^2 \mathbf{C}_0)} \quad (6.40)$$

となる. ここで, 差し当たっては L_{cr} は未知数である. さらに,

$$P_{cr} / \mathbf{A}_0 = \lambda_{cr} = (L_0 - L_{cr}) / L_0$$

なので, ここで $1 - \lambda_{cr} = L_{cr} / L_0 = j$ とおけば, 式 (6.40) は

$$4j^3 - 4j^2 + \frac{\pi^2 \mathbf{B}_0}{L_0^2} j \left(\frac{1}{\mathbf{C}_0} + \frac{1}{\mathbf{A}_0} \right) - \frac{\pi^2 \mathbf{B}_0}{L_0^2 \mathbf{C}_0} = 0 \quad (6.41)$$

と変形できる．この式から j を求めることができ、それゆえ、式 (6.40) から P_{cr} を得ることができる．

$\gamma = 0$ のとき、すなわち座屈が開始するよりも以前のときは、 $S_2 = 0$ であり、したがって $L_0/L = 1/(1 - \lambda)$ である．これより、座屈開始前のばねの短縮に関する以下のような式が得られる．

$$\delta_y = 2(L_0 - L) = 2\lambda L_0 = 2L_0 \frac{P}{\mathbf{A}_0} = 2P \frac{\pi R^3 L_0}{GIb_0}$$

ここで、もしも、 $n = 2L_0/b_0 =$ コイルの巻き数、 $d =$ 素線の直径、とすると

$$\delta_y = P \frac{64nR^3}{d^4G}$$

を得て、これは通常のコイルばねの解析結果に一致する．

ばねの中心線の変位については、 $P > P_{cr}$ ならば、水平変位は

$$\begin{aligned} h &= \int_0^L \sin \theta \, ds = R\sqrt{f} \int_0^\gamma \frac{(1 - \tau \cos \theta) \sin \theta \, d\theta}{[U(\theta)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{f} \frac{R}{\tau} [(1 - \tau \cos \gamma)^2 - (1 - \tau)^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.42)$$

となる．垂直変位 v は、式 (6.42) の被積分項の $\sin \theta$ を $\cos \theta$ に置き換えて得られ、

$$v = R\sqrt{f} \int_0^\gamma \frac{(1 - \tau \cos \theta) \cos \theta \, d\theta}{[U(\theta)]^{\frac{1}{2}}} \quad (6.43)$$

となる． $z = \cos \theta$ を代入すると、式 (6.43) は以下の種類の積分形に変形される．

$$\int_1^z \frac{z}{[V(z)]^{\frac{1}{2}}} dz \quad \text{また、} \quad \int_1^z \frac{z^2}{[V(z)]^{\frac{1}{2}}}$$

ここで、 $V(z)$ は z の 4 次式である．

あるいは、

$$v = L_0(1 - \lambda) \left(\frac{S_1 - S_3}{S_1 - S_2} \right) \quad (6.44)$$

とも表される．ここで、

$$S_3 = (1 - \tau) \sin^2(\gamma/2) + \frac{1}{8}(3 + 2\tau) \sin^4(\gamma/2) + \dots$$

である．

座屈後のばねの長さは式 (6.33) から得られる．

以上の議論は、コイル同士が変形中に接触しないコイルばねに対して適用可能である．また、本解析ではコイルの半径は変化しないこと、すなわち負荷前後でのコイル半径は大きく変化しないことを仮定している．もしも、コイルが $P < P_{cr}$ である軸圧縮力のみで

変形するとすれば、式(6.24)で $M_i = 0$ とすればよい。 R をつるまき線の半径、 α をその傾き角とすれば、変形後の半径 R_1 と変形後の傾き角 α_1 は、以下の連立方程式

$$\left. \begin{aligned} P \cos \alpha_1 &= \frac{C}{R_1}(V_1 - V), \\ P \sin \alpha_1 &= \frac{B}{R_1}(W_1 - W) \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

の解として得られる。

6章の参考文献

- (1) Clebsch, A., *Theorie der Elasticität fester Körper*, Leipzig(1862).
- (2) Love, A. E. H., *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Ed., p.385, Dover Publications, New York(1944).
- (3) Hess, W., Über die Biegung und Drillung eines dünnen Stabes, *Math. Ann.*, 23(1884), p.181.
- (4) Jacobi, C. G. J., Sur la Rotation d'un Corps. Jacobi's gesammelte Werke, Vol. 2, pp.289-352 (G. Reiner, Berlin. 1882).
- (5) Byrd, P. F., and Friedman, M. D., *Handbook of Elliptic Integrals*, p.303, Springer Verlag, Berlin(1954).
- (6) Hess, W., Über die Biegung und Drillung eines unendlich dünnen Stabes mit zwei gleichen Widerstaenden, *Math. Ann.*, 25 (1885), p.1.
- (7) Love, A. E. H., *Mathematical Theory of Elasticity*, 4th Ed., p.415.
- (8) Mizuno, M., Problem of large deflection of coiled spring, *Bull. Japan Soc. Mech. Eng.*, 3, 9(1960), p.95.
- (9) Timoshenko, S., *Theory of Elastic Stability*, 1st Ed., p.165, McGraw-Hill Book Company, New York(1936).
- (10) Biezeno, C. B., and Grammel, R., *Engineering Dynamics*, Vol.2, p.432, Blackie & Son Limited, London(1956).
- (11) Byrd, P. F., and Friedman, M. D., *Handbook of Elliptic Integrals*, Springer Verlag, Berlin(1954).

6章の追加参考文献

- (12) Tsuru, H., Equilibrium Shapes and Vibrations of Thin Elastic Rod, *J. Phys. Soc. Jpn.* 56, pp. 2309-2324 (1987).

-
- (13) Lu, C. L., and Perkins, N. C., Nonlinear spatial equilibria and stability of cables under uni-axial torque and thrust, *ASME J. Appl. Mech.*, 61(1994), pp.879-886.
 - (14) 紙田 徹, 近藤 恭平, 梁の 3 次元大変形の有限要素法解析 (第 1 報) 日本航空宇宙学会誌, 43 巻, 497 号 (1995), pp.335-343.
 - (15) 紙田 徹, 近藤 恭平, 梁の 3 次元大変形の有限要素法解析 (第 2 報), 日本航空宇宙学会誌, 43 巻, 497 号 (1995), pp. 344-349.
 - (16) Miyazaki, Y., and Kondo, K., Analytical solution of spatial elastica and its application to kinking problem, *Int. J. Solids and Struct.*, Vol.34(1997), pp.3619-3636.
 - (17) Atanackovic, T. M., and Glavardanov, V. B., Buckling of a twisted and compressed rod, *Int. J. Solids and Struct.*, Vol.39(2002), pp.2987-2999.
 - (18) Scarpello, G. M., and Ritelli, D., Elliptic integral solutions of spatial elastica of a thin straight rod bent under concentrated terminal forces, *Meccanica*, Vol.41, No.5(2006), pp.519-527.
 - (19) Fang, J., and Chen, J. S., Deformation and vibration of a spatial elastica with fixed end slopes, *Int. J. of Solids and Struct.*, Vol.50, 5(2013), pp.824-831.

訳者あとがき

本書は、はりの大たわみ（大変形）を扱った論文では必ずと言っていいほどに引用される名著「Flexible Bars」, R. Frisch-Fay 著, Butterworths (1962) の翻訳である。和書ではこの種の内容を専門的に扱った著書がほとんど見当たらず、この分野の基礎理論や研究手法を学ぶのにふさわしい内容を備えているために、非才を顧みずに訳書の出版を思い立った。Fay の本訳書が、日本におけるこの分野の発展に対して少しでも貢献するのであれば、訳者にとってこれに勝る喜びはない。

はじめに、あとがきとしては相応しいことではないと思われるが、原著書との個人的なつながりをいささかの感慨を交えて述べたいと思う。

訳者は、大学院修士課程を修了後に、ある高専の助手として研究者の第一歩を歩み始めた。いろいろな制約があって、大学院での研究を継続して進めることは不可能だったために、全く未開拓の平原に一人立ちすくんだ気持ちを抱きながらの素人同然の研究者としてのスタートであった。誰からも研究の指示を受けない点では全くの自由な立場であったが、何の実績も持たない人間が研究テーマを一人で探すということになり、自らの選択であったとはいえ、その自由への代償は大きかった。それは、4年ほどの試行錯誤を伴う研究テーマの手探りという、きびしい現実であった。（たいした能力のないものが「自由」を振りかざすと、大きな代償を伴うことを学んだ4年間であった。一方、この4年間の経験により、研究者として自立するために必要な要素を自ら学ぶことができたのは大きな収穫であった。）

この彷徨のさなか、倉西正嗣先生の著書「弾性学」（復刻版、国際理工学研究所、1970）のなかで述べられていたはりの大たわみの問題に対し、当時、新しい手法として注目を浴びていた境界要素法と反復解法とを組み合わせると、汎用的な手法にも拘わらず厳密解と同程度の精度を持つことを見だし、初めての論文（3章の追加参考文献(10)）を1985年に著すことができた。

その単著論文は、卒業論文や修士論文の研究テーマとはまったくかけ離れた、独力で開拓したものであったので、私の心に深く刻まれている。その論文で扱ったはりの大たわみ問題は、倉西先生の著書に詳述されていたが、その後、しばらく経って、その記述は本訳書の3.2節にさかのぼることができることを知るに至った。これが、原著書、R. Frisch-Fay 著、「Flexible Bars」との出会いである。

原著書は、柱やはりの大たわみ（大変形）について基礎から詳しく論じており、出版年（1962年）から相当経過しているにも拘わらず、その内容は今でも色褪せていない。むしろ、大変形を生じやすい軽量構造の設計が進んでいる現代において、棒やはりの大たわみを広い立場から論じている原著書は、より大きな価値を持っているともいえる。現在は、有限要素法（FEM）のソフトウェアを用いれば簡単に大変形解を得られるようになっているが、その解析結果に対し、大変形理論を学んでいけば深い力学的考察が可能となる。このため、本訳書は、FEMを日常的に使用しているエンジニアにも有用である。

著者のFay氏が前書きで述べているとおりに、本書は材料力学を修得した後の大学高学年や大学院修士課程のテキストとしての使用も可能である。なお、原著書の各章での大たわみ問題の計算例を筆算でトレースするのは、非常に手間を要する。そこで、本書では、Mathematica 11を用いたプログラムによりいくつかの計算例をチェックし、その計算結果を利用して本書のグラフの作成を行っている。また、それらのプログラムを本訳書の関連サイトからダウンロード可能とする予定なので、プログラムを動かしながら本訳書を読み進めれば、より効果的に学習を進められることと思う。そのなかでも、5章の級数解法に対して、Mathematicaは強力なツールとして利用可能である。

原著書の出版後から現在に至るまで、はりの大変形に関する数多くの研究が行われており、参考文献については、新たに文献の追加を行った。ただし、全ての文献を網羅している訳ではなく、訳者の関心に沿ったサーベイ範囲となっていることをご了解いただきたい。この補足文献により大変形についての最近の研究動向の一端でも捉えられればと思う。

なお、翻訳に当たっては、原著の明らかな誤植と思われる点については、修正を加えている。同時に、原著の図3.8の写真については、少々不鮮明であったために、原著と同様な実験装置を作成し、この装置でピアノ線の3点曲げ大たわみ曲げ実験を行っている様子を撮影したもので代替した。また、訳注を加えて読みやすさに配慮した。細心の注意を払ったつもりであるが、浅学非才のために原著者の意図を汲み取れない訳文があることを懼れている。この点については、読者の皆さんの忌憚のないご意見をいただければ大変有り難い。それらのご意見を次の版において反映させたいと考えている。

土田栄一郎先生（埼玉大学名誉教授）、岡村弘之先生（東京大学名誉教授、元東京理科大学学長）からは、弾性学および破壊力学について数え切れない薫陶を受けた。本訳書が両先生からの学恩に少しでも報いたものであることを願う。

最後に、訳者の研究活動の支えとなっている家族（和子、正人、宏美）、今は亡き両親（武、初枝）および研究室学生に深い感謝の意を表して結びとしたい。（2019.01.10、訳者しるす）

索引

- 圧縮力を受ける棒のたわみ , 20
 板ばね , 88, 110, 132
 板ばねの座屈形状 , 110
 一定の曲げモーメントを受ける片持ちはり , 47
 移動座標系 , 193
 運動的類似 , 193
 n 個の集中荷重を受ける片持ちはり , 61
 円輪の圧縮 , 120
 円輪の近似解析 , 128
 円輪の引張り , 115
 オイラーの座屈荷重 , 9
 オイラーの式 , 194
 オイラーの法則 , 175
 回転半径 , 87
 重ね合わせの原理 , 2, 115
 Castigliano の定理 , 129
 片持ちはり , 33, 171
 完全楕円積分 , 5, 14, 159, 201
 基本はり , 39, 42, 52, 61, 100, 108, 110
 極慣性モーメント , 175
 極慣性モーメント法 , 174
 極座標 , 173
 極断面 2 次モーメント , 195
 キルヒホッフの運動的類似 , 17
 グーデルマン関数 , 12
 傾斜した荷重を受ける円弧はり , 106
 傾斜した荷重を受ける片持ちはり , 49
 形状係数 , 205
 コイルばね , 203
 コイルばねの大変形 , 204
 固定座標系 , 193
 試行錯誤的な方法 , 35, 148, 174
 自重による柱の座屈 , 162
 支点摩擦 , 77
 4 分円 , 115, 117, 120, 123, 125, 131, 141, 154
 ジャイロスコープ , 203
 集中荷重を受ける曲がりはりの数値解析 , 147
 準線 , 199
 初期曲率を有するはり , 96
 図式解法によるたわみの計算 , 180
 第 1 種の完全楕円積分 , 5
 第 1 種の楕円積分 , 37, 38
 第 1 種のベッセル関数 , 164
 第 3 種の楕円積分 , 207
 第 2 種の完全楕円積分 , 5
 第 2 種のベッセル関数 , 164
 大変形 , 1, 74, 82
 楕円関数 , 4, 8, 51, 55, 56, 61, 90, 197
 楕円積分 , 4, 22, 35, 58, 72, 98, 99, 104
 弾性相似則の原理, 39, 42, 49, 58, 61, 90, 108, 120
 単振り子 , 16
 超越線 , 197
 テータ関数 , 202
 等価円輪 , 131
 等分布荷重を受ける単純支持はり , 178
 等分布荷重を受ける両端固定はり , 86
 トルクの力積 , 194
 ナイフエッジ支点上の真直はり , 71
 波状エラスティカ , 9, 44, 52, 101, 120, 123, 136, 143
 2 個の垂直荷重を受ける片持ちはり , 54
 2 次の錐面 , 197
 ニュートンの方程式 , 4
 ねじり剛性 , 195
 ノーダルエラスティカ , 14, 44, 99, 101, 105, 107, 117, 120, 133, 134, 142
 ハート型のはり , 176
 柱への偏心負荷 , 26
 はりの初等理論 , 92
 微小変形理論 , 41, 74, 130, 162, 170, 179, 186
 ひずみエネルギー , 27, 74, 113, 129, 180
 非対称荷重を受ける両端支持はり , 89
 フーリエ級数解 , 75
 不完全楕円積分 , 5, 29, 53, 159
 不伸長性 , 204
 不伸長の仮定 , 34, 54, 83, 95
 不静定 , 23, 81, 115, 129, 154
 分岐点 , 122

- 分布荷重を受ける水平な片持ちはり , 168
分布荷重を受けるはりの数値解析 , 186
- べき級数 , 159
ベルヌイ・オイラーの法則 , 1
変曲点 , 9, 88, 105, 108, 139, 173
- 方向余弦 , 194
母数 , 4, 7
- 曲がりはり , 95
マクローリン級数展開 , 159, 166
摩擦係数 , 77
摩擦力 , 72
- 無限長の棒 , 12
無次元荷重 , 34, 73
- ヤコビの楕円関数 , 5, 18
- ラムダ関数 , 12
- 両端固定のたわみやすいはり , 81
両端固定の半円輪 , 141
臨界荷重 , 20, 76, 77, 208
- Legendre の標準形 , 4, 55, 56, 58, 61, 103
- ローラー支点 , 71

訳者略歴

堀辺 忠志（ほりべ ただし）(tadashi.horibe.mech@vc.ibaraki.ac.jp,
tadashihoribe@gmail.com)

1980 年 東京大学大学院工学系研究科船用機械工学専攻修士課程修了

1980 年 茨城工業高等専門学校機械工学科助手

1991 年 茨城工業高等専門学校機械工学科助教授

2000 年 茨城大学工学部機械工学科助教授

2009 年 茨城大学工学部機械工学科教授

現 在 茨城大学大学院理工学研究科教授（博士（工学））

著書，Visual Basic でわかるやさしい有限要素法の基礎，森北出版（2008），単著

FLEXIBLE BARS by R. Frisch-Fay BUTTERWORTHS 1962

たわみやすいはりの大変形理論

© 堀辺 忠志

2019 年 2 月 15 日 初版第 1 刷発行

著者 … R. Frisch-Fay

訳者 … 堀辺 忠志