

# 立体骨組の有限要素解析

2025.07

堀辺忠志 著

# 1. 理論編

## 立体骨組の有限要素法による静解析

### 1. 立体骨組の計算

立体骨組の計算を行うには、平面骨組（平面ラーメン）の扱い<sup>1)</sup>を拡大して、もう一つの方  
向の曲げおよびねじりを計算に入れる必要があり、それに関連して、部材座標系のとり方、その入力  
方法(容易に入力できる方法)および座標変換の方法などについて考慮する必要がある。

#### 1. 1 部材座標系( $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ )

図1のように立体骨組の部材が3次元空間内で任意の方向を向いている場合を取り上げる。こ  
のとき、部材の引張り、曲げおよびねじりの基本的な性質は、部材に沿ったまっすぐな軸で考え

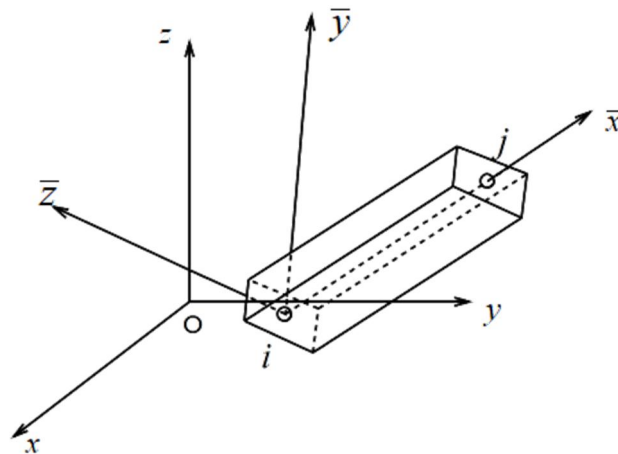


図 1 立体骨組部材と部材座標系

と扱いやすくなるので、以下、部材固有の座標系( $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ )（**部材座標** (local coordinate) という）  
を考える。

まず  $\bar{x}$  軸は、

\* 部材軸を  $\bar{x}$  軸にとる

\* 一方の端点(本書ではそれを節点  $i$  とし、これを**第 1 節点**という)を原点にとる。もう一方の  
端点 (これを節点  $j$  とし、**第 2 節点**という)に向かった方向を  $\bar{x}$  軸の正方向とする。

$\bar{y}$  軸と  $\bar{z}$  軸は、数学的には

\*  $\bar{x}$  軸,  $\bar{y}$  軸,  $\bar{z}$  軸が互いに直交するようにとる。

とすればよいのではあるが、2次元の場合と異なり3次元の場合にはまだ自由度があるから、なるべく

\* 結果の解釈が明快

実際に用いられるはりの断面は、長方形、H 形などのように、直交する二つの主要な方向(主軸 (principal axis) という)をもつものが多い。そのような場合には、図 2 の部材 AB のように部材座標系は部材の主軸に合わせてとったほうがよい。

しかし、それでもまだ自由度が残る。すなわち、断面内の主軸 2 本のうち、どちらを  $\bar{y}$  軸、どちらを  $\bar{z}$  軸にとるか、また正の向きをどちらにするかがまだ決まっていない。そこで、

\*  $\bar{y}$  軸は水平面内にとる(ここで水平面内とは全体座標の  $xy$  平面内のことを指す)

4

\*  $\bar{z}$  軸は上向きを正にとる

2) 部材軸が鉛直方向に一致していると上記の方式が使えないので、その場合に限って次のようにとることにする。図 2 の部材 BF を例にとって考えよう。

\*  $\bar{x}$  軸は全体座標系の  $z$  軸の向きにとる

\*  $\bar{y}$  軸は全体座標系の  $x$  軸の向きにとる

\*  $\bar{z}$  軸は全体座標系の  $y$  軸の向きにとる

と定める(ただし第 1 節点は必ず下側, すなわち  $z_i < z_j$  にとること)。

3) 上記 1), 2) で決めた  $\bar{y}$  軸,  $\bar{z}$  軸は, 多くの場合, 「部材の主軸に合わせて部材座標系をとる」という原則と矛盾しないであろうが, もし, 両者を一致させることができない場合(部材の主軸が  $xy$  平面外にある場合など)には, 部材の主軸の方を優先させ(それに合わせて  $\bar{y}$  軸,  $\bar{z}$  軸をとり), 上記 1), 2) で決めた軸(区別するため, それを  $\bar{y}'$  軸,  $\bar{z}'$  軸とよぶことにする)となす角(コードアングル, chord angle という<sup>2), 3)</sup>。図 3(d) 参照)を添えて全体座標系との関係を表わすことにする。 $\psi$  は,  $y'$  軸から  $y$  軸へ,  $x$  軸の正方向を向いて時計まわりを正として計る。座標変換の公式については, のちほど説明する。

## 1.2 ねじりに関する方程式

まず用語と基礎的事項を説明しておく。

**ねじり (torsion)** : 断面が部材軸(一般にはねじり中心軸)を中心に回転し, その回転角が軸方向に一定でない状態をいう。

**ねじり率 (specific angle of torsion)** : 断面の回転角  $\bar{\theta}_x$  の軸方向の変化率  $d\bar{\theta}_x/dx$  をさす。ねじり率は  $\omega$  と表すこともあり, **比ねじり角** ともいう。

**ねじりモーメント (torsional moment)** : ねじり変形を起こさせる力のモーメント ( $\bar{x}$  軸まわり) の一組をいい,  $\bar{M}_x$  で表わす。

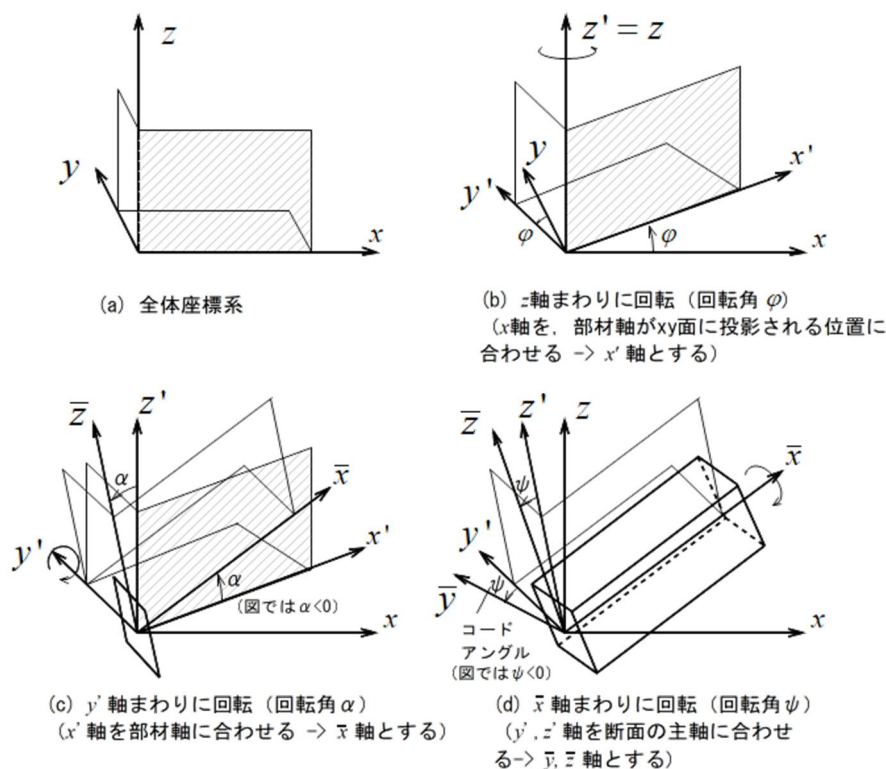


図 3 座標軸の回転とコードアングル

**ねじり剛性** (torsional rigidity) : ねじれにくさを表わす係数をいう。ねじり率とねじりモーメントは比例することが知られているので、その比例定数(ねじりモーメント/ねじり率)によって剛性を表わす。その値は横弾性係数 (せん断弾性係数)  $G$  に比例するので、ねじり剛性を  $GK$  と書くのが普通である。以上の諸関係を式にまとめると次のようになる。

$$M_x = GK \frac{d\bar{\theta}_x}{dx} = GK\omega, \quad \omega \equiv \frac{d\bar{\theta}_x}{dx} \quad (1)$$

この  $K$  は **Saint-Venant (サン・ブナン)のねじり定数** (Saint-Venant's torsional constant) とよばれている。その値は、図 4(a),(b)のように断面の形がごく簡単な場合については公式によって求められるが、一般には ラプラス方程式 ( $\nabla^2 \phi = 0$ ) を満たすサン・ブナンのゆがみ関数  $\phi$  を用いて

$$K = \iint_A \left[ x^2 + y^2 + x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] dx dy \quad (2)$$

を解いて求める必要がある<sup>4)</sup>。

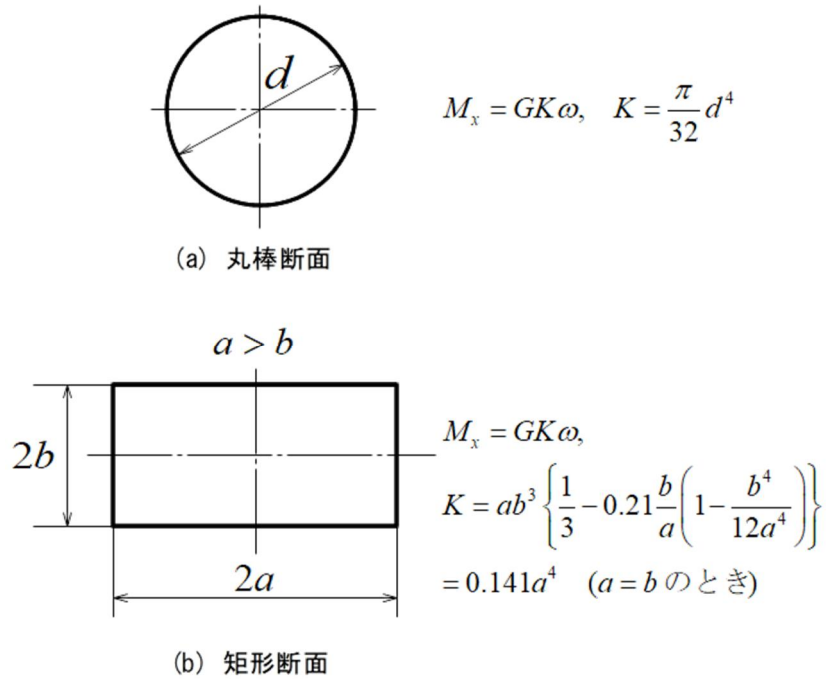


図 4 円形および矩形断面のねじり定数

$G$  は縦弾性係数（ヤング率） $E$  とポアソン比  $\nu$  から以下のようにして計算できる．すなわち

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

の関係から  $G$  が得られる．

話を簡単にするため、部材は一様断面と仮定し、また、図 5 のように外力（ここではトルク）は端点だけに作用するものとすれば、 $GK$  が一定、 $\bar{M}_x$  も一定だから  $d\bar{\theta}_x/dx$  も一定になり、端点の回転角を  $\bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{xj}$  とすれば

$$\frac{d\bar{\theta}_x}{dx} = \frac{\bar{\theta}_{xj} - \bar{\theta}_{xi}}{l} \quad \therefore M_x = GK \frac{\bar{\theta}_{xj} - \bar{\theta}_{xi}}{l} \quad (4)$$

となる．したがって、端点におけるつり合い方程式は

$$GK \frac{\bar{\theta}_{xi} - \bar{\theta}_{xj}}{l} = \bar{M}_{xi}, \quad GK \frac{\bar{\theta}_{xj} - \bar{\theta}_{xi}}{l} = \bar{M}_{xj} \quad (5)$$

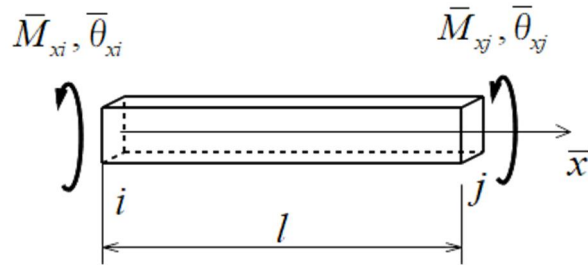


図 5 棒のねじり

となる．これをマトリックスで書けば

$$\begin{bmatrix} \kappa & -\kappa \\ \kappa & \kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{xj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{M}_{xi} \\ \bar{M}_{xj} \end{Bmatrix}, \quad \kappa = \frac{GK}{l} \quad (6)$$

となる．

### 1.3 引張りに関する方程式

記号の統一を図るために，部材の  $\bar{x}$  軸方の変位成分を  $\bar{u}$ ，同じく  $\bar{x}$  軸方向に作用する力成分を  $\bar{X}$  と表すことにすれば， $\bar{x}$  軸方向の力のつり合い式は

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{X}_j \end{Bmatrix}, \quad k = \frac{AE}{l} \quad (7)$$

となる．

### 1.4 曲げに関する方程式

一つの平面内の曲げに関しては既に文献（5）に要素剛性方程式を得ているが，3次元的に計算する場合には図6のように

\*  $\bar{x}-\bar{y}$  平面内の曲げ，

\*  $\bar{x}-\bar{z}$  平面内の曲げ



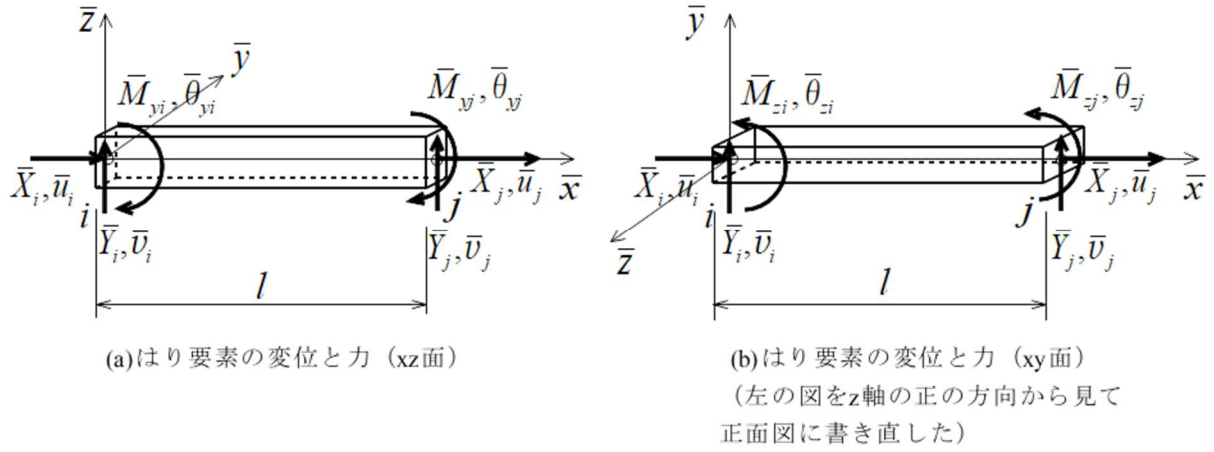


図 6 はりの 2 方向の曲げ

の二つを同時に扱う必要があるから、両者を区別するため

	変位	荷重
$\bar{y}$ 成分	$\bar{v}$ ,	$\bar{Y}$
$\bar{z}$ 成分	$\bar{w}$ ,	$\bar{Z}$

とし、

	回転角	力のモーメント	断面 2 次モーメント
$\bar{y}$ 軸まわり	$\bar{\theta}_y$ ,	$\bar{M}_y$ ,	$I_y$
$\bar{z}$ 軸まわり	$\bar{\theta}_z$ ,	$\bar{M}_z$ ,	$I_z$

で表わすことにして文献 (5) を引用すると、次のようになる。

$\bar{x}-\bar{y}$  平面内の曲げ ( $\bar{z}$  軸まわりの曲げ) の方程式

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l} & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \\ -\frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} & -\frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Y}_i \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{Y}_j \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

または

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & -c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & -c_2 & c_4 \\ -c_1 & -c_2 & c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_4 & -c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_{zi} \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_i \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{Y}_j \\ \bar{M}_{zj} \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここで

$$c_1 = \frac{12}{l^3} EI_z, \quad c_2 = \frac{6}{l^2} EI_z, \quad c_3 = \frac{4}{l} EI_z, \quad c_4 = \frac{2}{l} EI_z \quad (10)$$

である.

さらに,  $\bar{x}-\bar{z}$  平面では回転角やモーメントを「時計まわりを正」としなければならない. したがって,  $\bar{x}-\bar{z}$  平面内の曲げ ( $\bar{y}$  軸まわりの曲げ) の要素剛性方程式は,  $\bar{x}-\bar{y}$  面内の曲げの式において角度にマイナスをつけて整理すればよく

$$\begin{bmatrix} C_1 & -C_2 & -C_1 & -C_2 \\ -C_2 & C_3 & C_2 & C_4 \\ -C_1 & C_2 & C_1 & C_2 \\ C_2 & C_4 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{yi} \\ \bar{w}_j \\ \bar{\theta}_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_i \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{Z}_j \\ \bar{M}_{yj} \end{bmatrix} \quad (11)$$

となり, ここで

$$C_1 = \frac{12}{l^3} EI_y, \quad C_2 = \frac{6}{l^2} EI_y, \quad C_3 = \frac{4}{l} EI_y, \quad C_4 = \frac{2}{l} EI_y \quad (12)$$

である.

#### 1.4 要素マトリックスの統合

以上で考察したねじり変形, 軸方向変形, 曲げ変形 ( $\bar{x}-\bar{y}$  平面内と  $\bar{x}-\bar{z}$  平面内) の部材座標系に関する方程式(式(6), (7), (8), (11)) をまとめると次のようになる.

$$\begin{bmatrix}
k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\
0 & 0 & C_1 & 0 & -C_2 & 0 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & -C_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\
0 & 0 & -C_2 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & C_4 & 0 \\
0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & c_4 \\
-k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & -c_2 \\
0 & 0 & -C_1 & 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\
0 & 0 & -C_2 & 0 & C_4 & 0 & 0 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 \\
0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & c_3
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \\ \bar{\theta}_{zi} \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\theta}_{xj} \\ \bar{\theta}_{yj} \\ \bar{\theta}_{zj}
\end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
\bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \bar{M}_{xi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{Z}_j \\ \bar{M}_{xj} \\ \bar{M}_{yj} \\ \bar{M}_{zj}
\end{Bmatrix} \quad (13)$$

あるいは

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{\bar{F}\} \quad (14)$$

となる。

これは、立体骨組の剛性方程式を部材座標系で表現したものである。

座標変換およびマトリックスの重ね合わせには、この式を第1節点 i と第2節点 j ごとに分けて、次のように扱うと便利である。

$$\begin{Bmatrix} [\bar{K}_{ii}]\{\bar{u}\}_i + [\bar{K}_{ij}]\{\bar{u}\}_j = \{\bar{F}\}_i, \\ [\bar{K}_{ji}]\{\bar{u}\}_i + [\bar{K}_{jj}]\{\bar{u}\}_j = \{\bar{F}\}_j \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここで、

$$\{\bar{u}\}_i = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_{xi} \\ \bar{\theta}_{yi} \\ \bar{\theta}_{zi} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}\}_j = \begin{Bmatrix} \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{\theta}_{xj} \\ \bar{\theta}_{yj} \\ \bar{\theta}_{zj} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{F}\}_i = \begin{Bmatrix} \bar{X}_i \\ \bar{Y}_i \\ \bar{Z}_i \\ \bar{M}_{xi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{F}\}_j = \begin{Bmatrix} \bar{X}_j \\ \bar{Y}_j \\ \bar{Z}_j \\ \bar{M}_{xj} \\ \bar{M}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}, \quad [K_{ij}] = \begin{bmatrix} -k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & -C_1 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$[K_{ji}] = [K_{ij}]^T, \quad [K_{jj}] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

である。

### 1.5 座標系の回転について

コードアングルを理解するには、前もって座標系の回転について理解する必要がある。ここでは、簡単のために 2 次元的な場合から考える。

図 7(a)のように平面内で 2 つの座標系  $0-x, y$  と  $0-x', y'$  が角度  $\varphi$  で交わっているとする。  $x'$  軸方向の単位ベクトルを  $\mathbf{i}'$  とすると、その  $x$  成分は  $\cos \varphi (= l_x)$  であり、  $y$  成分は  $\sin \varphi (= l_y)$  である。

$\cos \varphi$  と  $\sin \varphi$  は  $x'$  軸の  $x$  軸、  $y$  軸に対する方向余弦である。位置ベクトル  $\mathbf{r}$  ( $0-x, y$  で  $(x, y)$ ) を  $0-x', y'$  系で表わした成分を  $x', y'$  とすれば、  $x'$  は  $\mathbf{r} = (x, y)$  の  $\mathbf{i}' = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  方向への正射影（図 7(a) 参照）である。  $\mathbf{i}'$  は単位ベクトルであるから、  $x'$  は  $\mathbf{r}$  と  $\mathbf{i}'$  のスカラー積（内積）であると考えてもよい。すなわち

$$x' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{i}' = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad (19)$$

同様に  $y'$  軸方向の単位ベクトル  $\mathbf{j}'$  の  $0-x, y$  系に対する方向余弦は  $\cos(\varphi + \pi/2) = -\sin \varphi (= m_x)$

と  $\cos \varphi (= m_y)$  であるから

$$y' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad (20)$$

である。これらが  $(x, y)$  と  $(x', y')$  の関係を与える。

逆に、  $(x, y)$  を  $(x', y')$  で表す場合は、図 7(b)を参照して

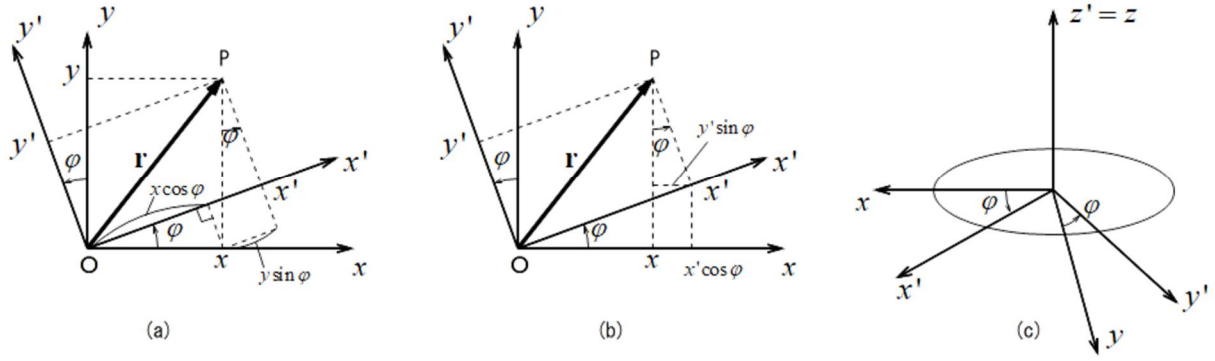


図 7 座標軸の回転

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

と表される。

この変換はマトリックスの形で

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (22)$$

と書き、行と列を入れ替えた行列(転置行列)を転置 (transposed)の上付き文字を用いて

$$A^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (23)$$

と書けば、座標変換式は

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = A^T \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (25)$$

と表すこともできる。なお、マトリックス  $A$  はベクトルの長さを変えない変換であるため、

$A^T = A^{-1}$  の関係がある。この関係を有するマトリックスを直交マトリックス (orthogonal matrix)

という。

さらに、図 7(c)のように、 $xy$  平面に垂直な方向 (右ねじ) に  $z$  軸を考え、以上の回転を  $z$  軸まわりの座標変換とみなすと

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

と表すこともできる．同様に，図 7(c)において， $z$  軸まわりの回転の代わりに  $x$  軸まわりの回転（回転角を  $\psi$ ）を考えると

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (27)$$

と表される．

## 1.6 座標変換

全体座標系  $(x, y, z)$  で節点の変位および荷重を列ベクトルで表すと

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad (28)$$

となる．一方，部材座標系  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  で節点の変位および荷重を列ベクトルで表すと

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

となる．

つぎに，局所座標系で表された要素剛性方程式(14)を全体座標  $(x, y, z)$  に基づいて書き表すことを考える．座標変換に対して必要な変換マトリックス  $[T]$  については，局所座標と全体座標の変換を考えればよい．

変位や曲げやねじり角に関する座標変換は

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \\ \bar{\theta}_z \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}, \quad [T] = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}} & m_{\bar{x}} & n_{\bar{x}} \\ l_{\bar{y}} & m_{\bar{y}} & n_{\bar{y}} \\ l_{\bar{z}} & m_{\bar{z}} & n_{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\{\bar{u}\} = [T] \{u\} \quad (31)$$

と表される．なお，回転角  $\bar{\theta}_x, \dots, \theta_z$  はベクトルではないので，変位ベクトルや力のベクトルのよ

うな座標変換公式は適用できない。しかし、回転角が微小な場合は、ベクトルと同様の座標変換が適用可能であるため、それを利用する。同様に、力（曲げモーメントも含む）成分も

$$\{\bar{F}\} = [T]\{F\} \quad (32)$$

と変換される。ここで、 $[T]$  は

$$[T] = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}} & m_{\bar{x}} & n_{\bar{x}} \\ l_{\bar{y}} & m_{\bar{y}} & n_{\bar{y}} \\ l_{\bar{z}} & m_{\bar{z}} & n_{\bar{z}} \end{bmatrix} \quad (33)$$

であり、 $l_{\bar{x}}, m_{\bar{x}}, n_{\bar{x}}$  は、部材座標の  $\bar{x}$  軸が全体座標  $(x, y, z)$  の軸とのなす角の余弦（方向余弦（direction cosine）という）である。同じく、 $l_{\bar{y}}, m_{\bar{y}}, n_{\bar{y}}$  は、部材座標の  $\bar{y}$  軸が全体座標  $(x, y, z)$  の座標軸となす角の余弦、そして  $l_{\bar{z}}, m_{\bar{z}}, n_{\bar{z}}$  は、部材座標の  $\bar{z}$  軸が全体座標  $(x, y, z)$  の座標軸とのなす角の余弦である。

部材座標  $\bar{x}$  軸の方向余弦  $(l_{\bar{x}}, m_{\bar{x}}, n_{\bar{x}})$  は、節点  $i, j$  の全体座標での座標値を  $(x_i, y_i, z_i)$ ,  $(x_j, y_j, z_j)$  とすると、図 8(a) より

$$l_{\bar{x}} = \frac{x_j - x_i}{l}, m_{\bar{x}} = \frac{y_j - y_i}{l}, n_{\bar{x}} = \frac{z_j - z_i}{l}, l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (34)$$

である。なお、図 8 では、理解の便宜のために全体座標系と部材座標系の原点を同じ位置に重ねて表示している。

さらに、 $\Delta x = x_j - x_i$ ,  $\Delta y = y_j - y_i$ ,  $\Delta z = z_j - z_i$  とおくと

$$l_{\bar{x}} = \frac{\Delta x}{l}, m_{\bar{x}} = \frac{\Delta y}{l}, n_{\bar{x}} = \frac{\Delta z}{l} \quad (35)$$

となる。

次に、図 8(b), (b') に示すように、部材の  $xy$  面上の投影位置と  $x$  軸とが重なるように座標軸の  $z$  軸まわりに  $\varphi$  だけ回転した場合を考える。すると  $y'$  軸の方向余弦  $l_{y'}, m_{y'}, n_{y'}$  は

$$l_{y'} = \cos(\varphi + \pi/2) = -\sin \varphi = -\frac{\Delta y}{l_2}, m_{y'} = \cos \varphi = \frac{\Delta x}{l_2}, n_{y'} = \cos(\pi/2) = 0 \quad (36)$$

となる。ここで、図 8(a) より  $\sin \varphi = \Delta y / l_2$ ,  $\cos \varphi = \Delta x / l_2$  ( $l_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ) の関係を利用した。

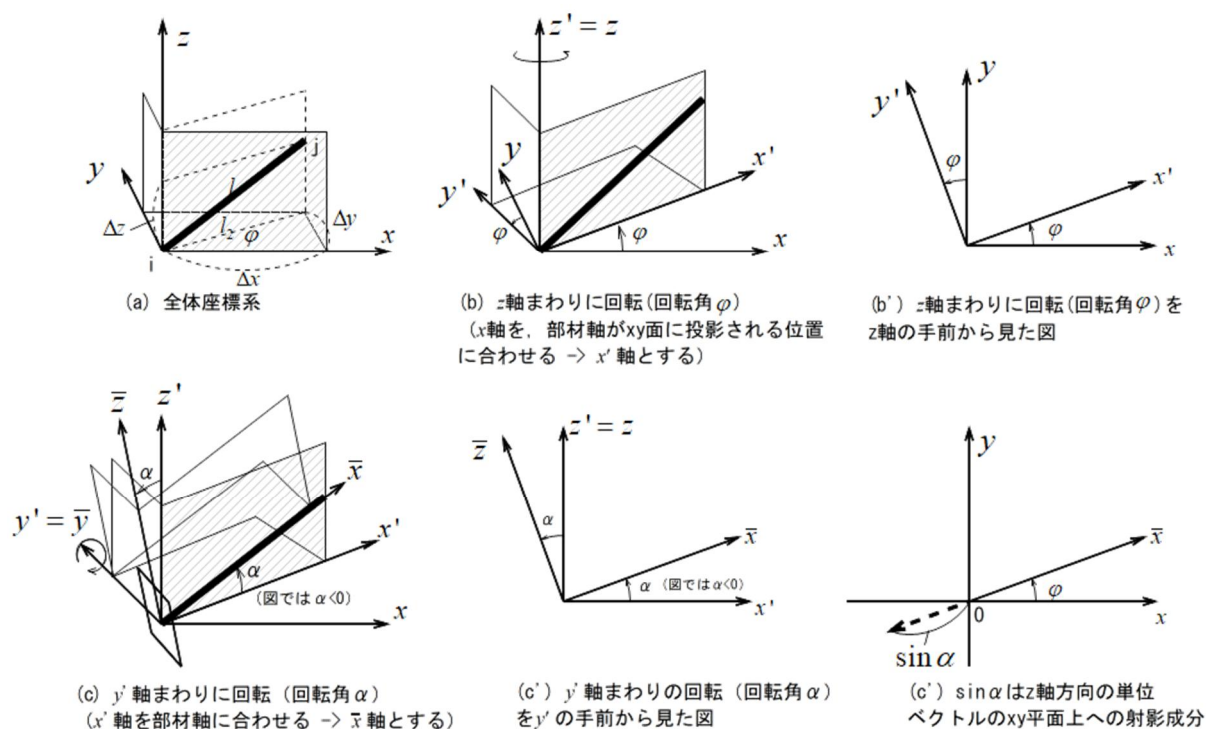


図 8 座標軸の回転と部材座標

さらに、図 8(c),(c')に示すように、部材軸方向と  $x'$  軸とが重なるように  $y'$  軸まわりに  $\alpha$  だけ回転した場合を考える。このとき、図 8(c')から明らかのように  $\bar{z}$  軸と  $z' (=z)$  軸の角度は  $\alpha$  であるから

$$n_{\bar{z}} = \cos \alpha$$

となる。また、 $\bar{z}$  軸の単位ベクトルの  $xy$  平面上への射影成分は図 8 (c'') に示すように  $\sin \alpha$  である。この  $\sin \alpha$  の  $x, y$  軸への射影成分が  $l_{\bar{z}}, m_{\bar{z}}$  となるから

$$l_{\bar{z}} = (\sin \alpha)(-\cos \varphi) = -\frac{\Delta x}{l_2} \sin \alpha, \quad m_{\bar{z}} = (\sin \alpha)(-\sin \varphi) = -\frac{\Delta y}{l_2} \sin \alpha \quad (37)$$

となる。

以上の結果をまとめると、座標変換マトリックス  $[T]$  は



$$[T] = \begin{bmatrix} l_{\bar{x}} & m_{\bar{x}} & n_{\bar{x}} \\ l_{\bar{y}} & m_{\bar{y}} & n_{\bar{y}} \\ l_{\bar{z}} & m_{\bar{z}} & n_{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x}{l_1} & \frac{\Delta y}{l_1} & \frac{\Delta z}{l_1} \\ -\frac{\Delta y}{l_2} & \frac{\Delta x}{l_2} & 0 \\ -\frac{\Delta x}{l_2} \sin \alpha & -\frac{\Delta y}{l_2} \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (38)$$

となる。

なお，部材軸  $\bar{x}$  方向が鉛直軸（ $z$  軸）に一致している場合には，以上の関係式が利用できないので別扱いする必要がある。このときには，前節での定義通り（ $\bar{x}$  軸は全体座標系の  $z$  軸の向きにとる， $\bar{y}$  軸は全体座標系の  $x$  軸の向きにとる， $\bar{z}$  軸は全体座標系の  $y$  軸の向きにとる， $z_i < z_j$  と

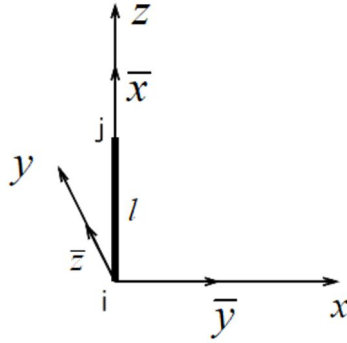


図 9 部材軸が鉛直軸を向いている場合

する) に  $\bar{y}, \bar{z}$  軸を定めればよく，図 9 のようになる。したがって

$$\begin{aligned} l_{\bar{x}} &= 0, & m_{\bar{x}} &= 0, & n_{\bar{x}} &= 1, \\ l_{\bar{y}} &= 1, & m_{\bar{y}} &= 0, & n_{\bar{y}} &= 0, \\ l_{\bar{z}} &= 0, & m_{\bar{z}} &= 1, & n_{\bar{z}} &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

となる。

1.1 節の 3) の場合には，上記の変換 1) のあとに，さらに  $\bar{x}$  軸のまわりに  $\psi$  だけ回転させれば，

$\bar{y}, \bar{z}$  を部材の主軸方向に一致させることができる。したがって，座標変換式は

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{\bar{x}} & m_{\bar{x}} & n_{\bar{x}} \\ l_{\bar{y}} & m_{\bar{y}} & n_{\bar{y}} \\ l_{\bar{z}} & m_{\bar{z}} & n_{\bar{z}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (40)$$

と表される。ここで

$$\begin{aligned}
[T] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{\bar{x}} & m_{\bar{x}} & n_{\bar{x}} \\ l_{\bar{y}} & m_{\bar{y}} & n_{\bar{y}} \\ l_{\bar{z}} & m_{\bar{z}} & n_{\bar{z}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} l_{\bar{x}} & m_{\bar{x}} & n_{\bar{x}} \\ l_{\bar{x}} \cos \psi - l_{\bar{y}} \sin \psi & m_{\bar{y}} \cos \psi + m_{\bar{z}} \sin \psi & n_{\bar{y}} \cos \psi + n_{\bar{z}} \sin \psi \\ l_{\bar{z}} \cos \psi - l_{\bar{y}} \sin \psi & m_{\bar{z}} \cos \psi - m_{\bar{y}} \sin \psi & n_{\bar{z}} \cos \psi - n_{\bar{y}} \sin \psi \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{41}$$

である．この $[T]$ も直交マトリックスであり， $A^T = A^{-1}$ の関係を有する．

式 (22) に基づき， $x, y, z$  方向の変位ベクトルなどを $\bar{U}_i$ と表示して，節点  $i, j$  ごとに並べると

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [T] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ u_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_i \\ \theta_i \\ u_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \tag{42}$$

となる．したがって，この式の右辺の 12 行 12 列のマトリックス $[T]$ （式 (41) の $[T]$ と同じ記号を使っているが，その違いは明らかであろう）が座標変換マトリックスとなる．外力ベクトルも式 (24)の変換式に従う．

式(42)などを式(14)に代入すれば

$$[\bar{K}][T]\{u\} = [T]\{F\} \tag{43}$$

となる．これより次のような全体座標系で表した要素剛性方程式が得られる．

$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{44}$$

ここで， $[K]$ は

$$[K] = [T]^{-1}[\bar{K}][T] = [T]^T[\bar{K}][T] \tag{45}$$

の 12 行 12 列のマトリックスであり， $[T]^{-1} = [T]^T$ の関係を利用した．

この要素剛性マトリックス $[K]$ をすべての要素について重ね合わせれば，対象とする問題の全体剛性マトリックスが得られる．

多くの 3 次元構造物では断面の主軸が局所座標 $(\bar{y}, \bar{z})$ に一致していることが多く，この場合にはコードアングルがゼロになる．したがって，ゼロのデータをコードアングルとして利用でき，少ないデータで F E M 解析が可能となる．なお，参考までに，要素が全体座標軸上に配置され，

コードアングルがゼロの場合の部材座標系の方向を図 10 に示す。

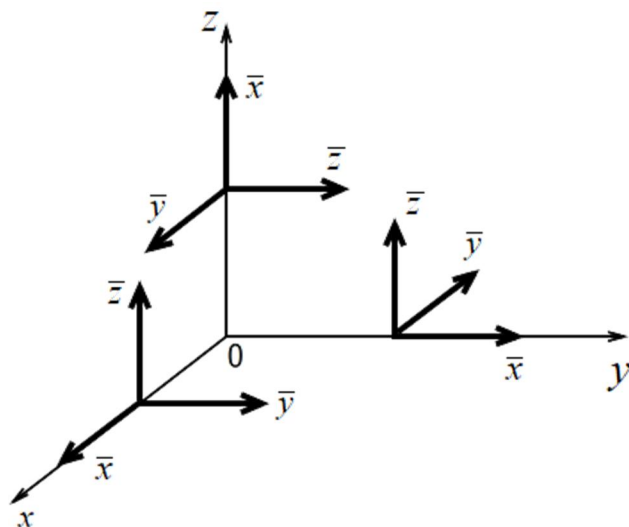


図 8 コードアングルがゼロの場合の部材座標系

### 1.7 各要素の曲げモーメントほかの計算

全体剛性方程式を解いて各節点の変位や回転角が得られたあとに，各部材の節点力，曲げモーメント，ねじりモーメントなどを計算するには，以下のようにすればよい。

式 (14) より，部材座標系での剛性方程式は

$$[\bar{K}]\{\bar{u}\} = \{\bar{F}\} \quad (46)$$

と表される．一方で，部材座標での変位は，式 (40) より

$$\{\bar{u}\} = [T]\{u\} \quad (47)$$

である．以上の式 (46)，(47) より

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}][T]\{u\} \quad (48)$$

が得られ，この式より部材ごとの節点力，曲げモーメントおよびねじりモーメントを計算することができる。

## 2. プログラム編

## 有限要素法による立体骨組解析プログラム

### 2. プログラムの概要

- 1) 本プログラム rm3ds1.exe は、はり要素を用いた有限要素法 (FEM) によって立体 (3 次元) 骨組構造を解析するものである。ソルバーとしてスカイライン法とコレスキー法<sup>2),4)</sup>を用い、開発言語として Visual Basic 2022 を用いている。
- 2) FEM 解析結果にもとづき、節点変位、要素の曲げモーメント (主軸方向)、トルクおよびせん断力 (主軸方向) などを 3 次元的に表示し、それらの図はマウス操作によって自由に移動および回転できる。
- 3) ユーザーはワードパッドなどのテキストエディターを用いるか、メッシュ生成アプリ (開発中) を用いて、後に示す入力データを作成し、本プログラムはそのデータをファイルから読み込んで FEM を実行する。
- 4) 本プログラムは、最大 5000 節点まで解析可能であり、数千節点の規模の問題であっても数秒で解を得ることができる。また、材料数も 5000 個を上限としており、ほぼ制限なく解析できるものと考えてよい。
- 5) 解析結果は、テキストファイルで出力されるとともに、解析対象の変位の様子や曲げモーメント、トルクなどが画面上に 3 次元表示される。
- 6) 画面に表示された変形図や曲げモーメント図などは、マウスの操作によって、Google Map 風に自由に移動、拡大縮小が可能である。これにより、細部にわたって変位、曲げモーメントおよびトルクを調べることができる。
- 7) 最大変位、最大、最小曲げモーメント、最大トルクおよび最大せん断力などは、ただちに読み取れるように画面に表示される。
- 8) マウスを節点や要素中央付近に移動すると、その節点の変位、曲げモーメント、トルクなどの値が自動的にポップアップ表示される。
- 9) 長さの単位に m (メートル) を用いるとヤング率が  $206 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  (Pa ともいう) となったり慣性モーメントが  $10^{-8}$  以下となったりする。このような「桁の差」が大きいと、数値解法 (連立方程式の解法など) で丸め誤差が出やすくなるので、本プログラムでは長さの単位を mm に限る。

以下の図 11 は、本プログラムの流れ図である。実際には、この流れのほかに、3 次元座標の投影変換、マウスイベント処理などの図形処理プログラムが付随している。

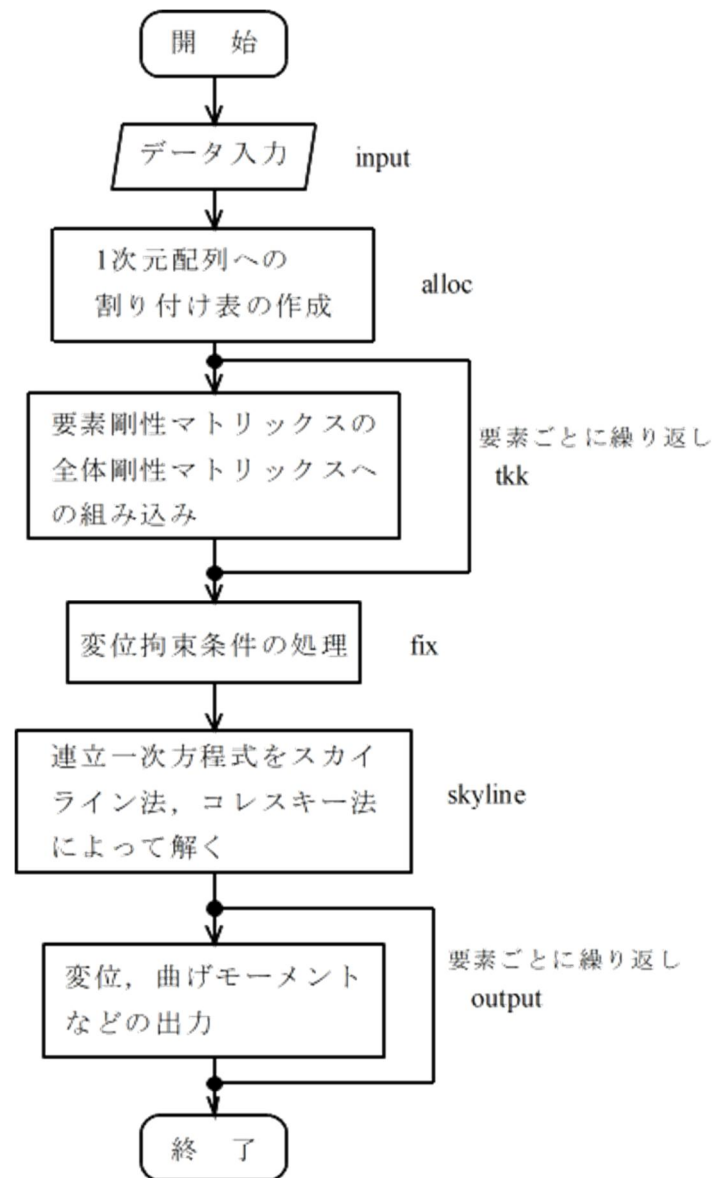


図 9 有限要素解析の流れ図

理論編で説明した要素剛性マトリックスは，入力データにある『要素データ』や『材料データ』を元に，プログラム内部で自動的に計算されている。

## 2.1 ユーザーが準備すべきデータ

(以下の順に作成したファイル名を balcony.dat とする)

以下の図 12 のようなコの字に曲がった丸棒の両端 A, B を固定し, CD の中央に曲がり平面に垂直な荷重  $P$  を加えたときの例を挙げて, そのデータの準備手順を示す.

なお, 丸棒を仮定しているので, 主軸の方向を決定するコードアングルへの配慮は不要である. すなわち, すべての部材のコードアングルをゼロと扱ってよい.

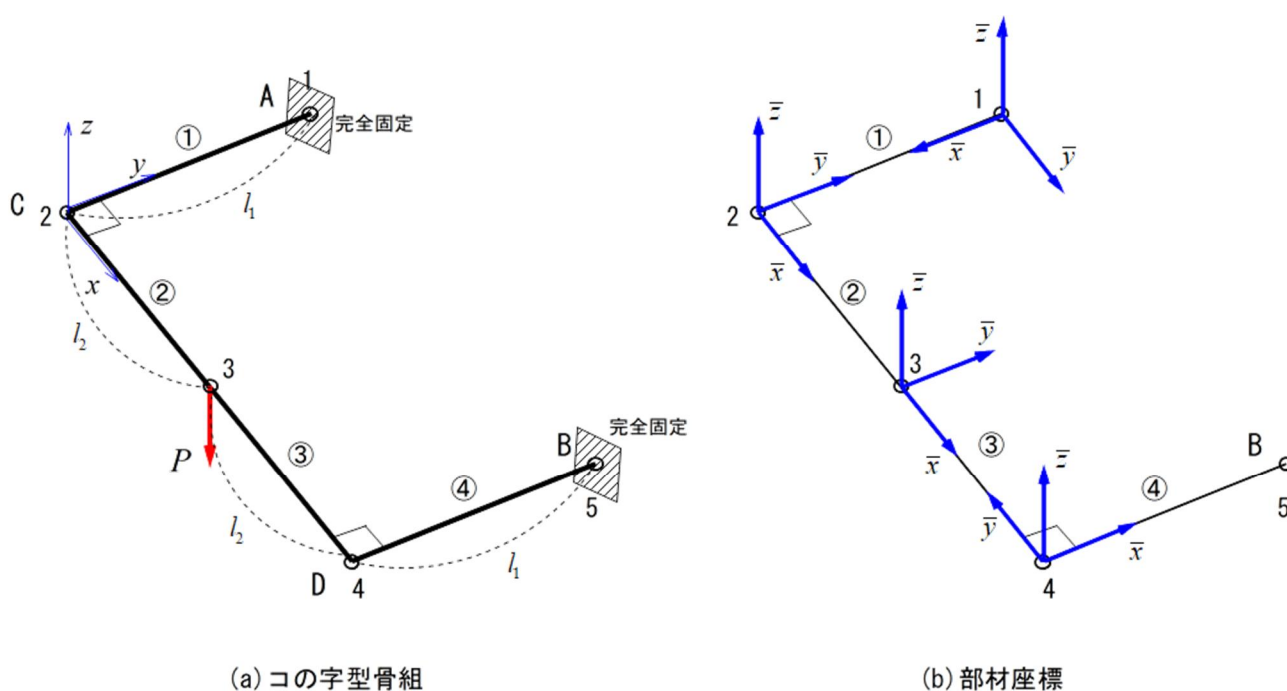


図 10 コの字型骨組と部材座標系

はりの寸法は, 長さ  $l_1=1000$  mm,  $l_2=1000$  mm, 直径  $d=20$  mm とし, 点 A, B を固定端, 部材 CD 中央に垂直下方に荷重  $P=100$  N が作用するものとする. 材料は, 軟鋼を仮定し, 縦弾性係数を  $E=206 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>  $= 206 \times 10^3$  N/mm<sup>2</sup>, ポアソン比を  $\nu=0.3$  とする.

まず, **基本データ**から考える. 基本データは, 1) 総節点数(np), 2) 総要素数(ne), 3) 拘束節点数(nb), 4) 荷重節点数(nf), 5) 材料数(nm), 6) ゼロでないコードアングルを有する要素数(nca), から成る. 本問題では

5, 4, 2, 1, 1, 0

となる. これらは, 整数型データであり, データはコンマで区切り, わかりやすさのために空白を入れ

てもよい。

次に、**節点データ**作成のために図 12(a)の点 C を原点と選び、図のような(x, y, z) 座標を設定する。コの字状のはりに対して図のように 5 個の節点を設定し、それぞれの節点に 1 から 5 までの番号を与える。なお、有限要素法では、荷重は節点に負荷されることを前提に処理するので、荷重位置に節点を設けるようにする。これに対応して、バルコニーを 4 個の要素に分割し、それぞれに 1 から 4 までの要素番号を割り当てる。有限要素法では、節点番号と区別するために要素番号を○で囲む習慣がある。各節点を節点番号順に並べてそれらの x,y,z 座標を求めたものを節点データとよび、それらは

```
1,    0.0, 1000.0, 0.0
2,    0.0,    0.0, 0.0
3, 1000.0,    0.0, 0.0
4, 2000.0,    0.0, 0.0
5, 2000.0, 1000.0, 0.0
```

となる。このとき、データを区切るためにデータの間にはコンマを入れてもよい。また、節点番号は整数、x,y 座標は実数（小数点付きの数値）で記述し、数字、コンマおよび空白などはすべて半角とする。

なお、「理論編」に示したように、(y 軸は水平面、z 軸は全体座標の z 軸方向に合わせる、コードアングルが与えられた場合には、y,z 軸を主軸に合わせるなどの規約に従った) 部材座標系は図 12(b)のように定められる。

次に、**材料データ**を用意する。材料データは、1) 材料番号、2) 縦弾性係数  $E$  (ヤング率)、3) ポアソン比  $\nu$  から成る。なお、ねじり変形については、横弾性係数 (せん断弾性係数)  $G$  が必要であるが、等方性材料の場合には

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1)$$

の関係があるので、プログラム中ではこの計算に基づいて  $G$  を用いている。

これより、本問題の**材料データ**は、材料数は 1 個なので

```
1, 206.0e3, 0.3
```

となる ( $206.0e3=206.0 \times 10^3$  を表す)。縦弾性係数  $E$  は、節点座標にミリメートル mm の単位を用いているので、N/mm<sup>2</sup> の単位で与える。材料番号については、はり全体が同一材料なので 1 とする。たとえば、はりが 2 個の材料から成り立つ場合には、要素に応じて材料番号を 1 もしくは 2 とする。

続いて、**要素 (element) データ**を作成する。図 12 では全要素数は 4 個なので、各要素に番号を 1 から 4 まで割り当てる。また、要素データには、1) 要素番号、2) 要素端点の節点番号、3) もう一方の端点の節点番号、4) y 軸まわりの断面二次モーメント、5) z 軸まわりの断面二次モーメント、6) 断面積、



7) サン・ブナンのねじり定数, 8) 材料番号を与える必要がある. なお, ここでの断面 2 次モーメントの  $y, z$  軸とは, 部材座標で考えた主軸方向を指す.

直径  $d$  の丸棒の場合は, 部材の主軸方向 ( $y, z$  方向) の区別はないので, 断面 2 次モーメント  $I_y, I_z$  は

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 20^4}{64} = 7854 \text{ mm}^4, \quad I_z = \frac{\pi d^4}{64} 7854 \text{ mm}^4$$

となる. また, 丸棒の断面積  $A$  とサン・ブナンのねじり定数  $K$  は

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 20^2}{4} = 314.16 \text{ mm}^2, \quad K = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 20^4}{32} = 15708 \text{ mm}^4$$

となる.

これより, 4 個の要素データは

```
1, 1, 2, 7854.0, 7854.0, 314.16, 15708.0, 1
2, 2, 3, 7854.0, 7854.0, 314.16, 15708.0, 1
3, 3, 4, 7854.0, 7854.0, 314.16, 15708.0, 1
4, 4, 5, 7854.0, 7854.0, 314.16, 15708.0, 1
```

となる

次に, **拘束 (constraint) データ**を考える. 節点に拘束を与えないと, はりには剛体変位や剛体回転が生じて問題そのものが解析できない. 本問題では, 完全固定された節点 1, 5 が拘束節点となる. 問題によっては, 考えている問題の剛体変位や剛体回転を防ぐために, 変形の対称性などから変位の拘束状態を付与することが必要な場合があることに留意する. 節点の  $x, y, z$  方向別の変位および  $x, y, z$  軸まわりの回転の拘束の有無を 1 (拘束あり) または 0 (拘束なし) で表すとすると, 本問題の拘束データは

```
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
5, 1, 1, 1, 1, 1, 1
```

となる. ここで, 拘束の有無を表す 0, 1 は整数とする.

最後は**荷重 (load) データ**について述べる. 図 12(a)に示すように, 節点 3 の  $z$  軸の負の方向に 100 N が作用するものとする. ヤング率を与えた際の力の単位はニュートン [N] であったから, 荷重の単位もニュートン [N] で与える必要がある. この荷重データは, 1) 荷重節点番号, 2)  $x$  方向荷重, 3)  $y$  方向荷重, 4)  $z$  方向荷重, 5)  $x$  軸回りのモーメント (トルク), 6)  $y$  軸回りの曲げモーメント, 7)  $z$  軸回りの曲げモーメントで与え, 本問題では

```
3, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, 0.0
```

となる. 荷重節点番号は整数, 荷重値は実数とする.

以上の説明に基づいて, 図 12 の問題に関して, ユーザーが用意すべきデータは,

```
5, 4, 2, 1, 1, 0
```

```

1,    0.0, 1000.0, 0.0
2,    0.0,    0.0, 0.0
3, 1000.0,    0.0, 0.0
4, 2000.0,    0.0, 0.0
5, 2000.0, 1000.0, 0.0
1, 206.0e3, 0.3
1, 1, 2, 7854.0, 7854.0, 314.16, 15708.0, 1
2, 2, 3, 7854.0, 7854.0, 314.16, 15708.0, 1
3, 3, 4, 7854.0, 7854.0, 314.16, 15708.0, 1
4, 4, 5, 7854.0, 7854.0, 314.16, 15708.0, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
5, 1, 1, 1, 1, 1, 1
3, 0.0, 0.0, -100.0, 0.0, 0.0, 0.0

```

である.

以上をまとめると、解析に必要な入力データは以下のようになっている.

#### 入力データの構成 (( ) 内の記号はプログラムで用いている変数名)

##### 1) 基本データ (1 行)

総節点数(np), 総要素数(ne), 拘束節点数(nb), 荷重節点数 (nf), 材料数(nm),  
ゼロでないコードアングルを有する要素数(nca)

##### 2) 節点データ (np 行)

節点番号,  $x$  座標,  $y$  座標,  $z$  座標 (全体座標)

##### 3) 材料データ (nm 行)

材料番号, 縦弾性係数 (ヤング率), ポアソン比

##### 4) 要素データ (ne 行)

要素番号, 要素端点の節点番号, もう一方の端点の節点番号,  
 $y$  軸まわりの断面二次モーメント,  $z$  軸まわりの断面二次モーメント,  
断面積, サン・ブナンのねじり定数, 材料番号  
(ここでの断面 2 次モーメントの  $y$ ,  $z$  軸とは, 部材座標で考えた座標軸である)

##### 5) コードアングルに関するデータ (nca 行, もし nca=0 ならこのデータは不要)

コードアングルを与える節点番号, コードアングルの大きさ (° で入力)

##### 6) 拘束条件のデータ (nb 行), 以下は全体座標

拘束節点番号,  $x$  方向変位の拘束の有無 (0…拘束無し, 1…拘束あり),

y 方向変位の拘束の有無 (0 または 1),  
z 方向変位の拘束の有無 (0 または 1),  
x 軸回りの回転 ( $\theta_x$ ) の拘束の有無 (0 または 1),  
y 軸回りの回転 ( $\theta_y$ ) の拘束の有無 (0 または 1),  
z 軸回りの回転 ( $\theta_z$ ) の拘束の有無 (0 または 1)

#### 7) 荷重データ (nf 行)

荷重節点番号, x 方向荷重, y 方向荷重, z 方向荷重, x 軸回りのモーメント (トルク), y 軸回りの曲げモーメント, z 軸回りの曲げモーメント

## 2.2 FEM の実行手順

3. で準備したデータ (balcony.dat) をもとに, 立体骨組問題の有限要素解析の手順を以下に述べる.

本プログラム rm3ds1 を起動すると図 13 のような起動画面が示される.

ここで, ツールメニューの左側の

「ファイル」→「読み込み」

をクリックすると, ファイル選択のダイアログボックスが表示されるので, 3. のデータ balcony.dat を選択する.

図 14 は, そのファイルを選択後の画面である. このとき単位確認の画面が現れ, これは座標データが mm であること, 力の単位が N であることを確認するための画面であり, ここでは, 「はい (Y)」を選ぶ. (長さの単位に m (メートル) を選ぶと桁落ちなどの数値計算上の問題が生じるので, m は使用しないこと)

画面には, 図 15 のように, 与えられた節点データ, 要素データに基づいて要素分割形状が描かれ, 拘束節点や荷重節点に対してもそれに応じた記号が描かれる.

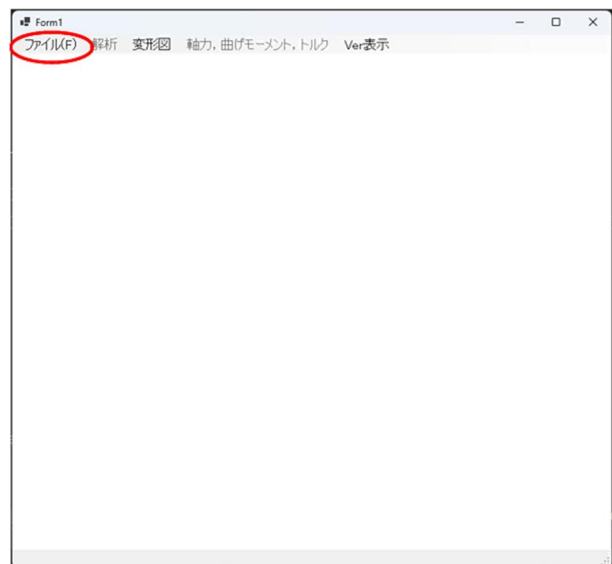


図 11 プログラム起動後の画面

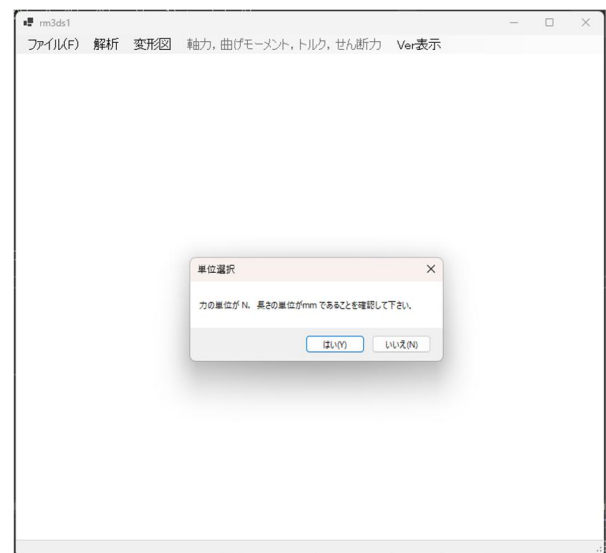


図 12 単位の設定

次に、ツールメニューの「解析」→「実行」とメニューを選択すれば、有限要素解析が実行される。本問題はわずか5節点の小規模な問題なので瞬時に解析が終了する。なお、数千節点の規模の問題であっても数秒で解析が終了する。

解析が終わったあとに、ツールメニューの「変形図」→「変形図」(節点、要素番号あり)

とすると、図 16 のような変形図が表示される。そこでは、はりの変形後の様子が赤い破線で示され、最大変位の生じる節点近傍に

「Max」という文字が表示される。わかりやすさのために、変位の大きさは実際の変位をすこし大きめに拡大して(最大変位の大きさが画面の大きさの 10%としている)表示している。

さらに、マウスを節点近くに移動させると(マウスホバー (mouse hover) という)、その節点の変位(と同時に曲げモーメントやトルク)の大きさが、 $x, y$ 成分ごとにポップアップ表示される。図 17 には、節点 3 の近くにマウスを近づけたときの変位の値( $u=0, v=0, w=-1.724 \times 10^1 \text{ mm}$ )がポップアップされる様子が示されている。同時に、画面下のツールストリップ部に最大変位が表示される。

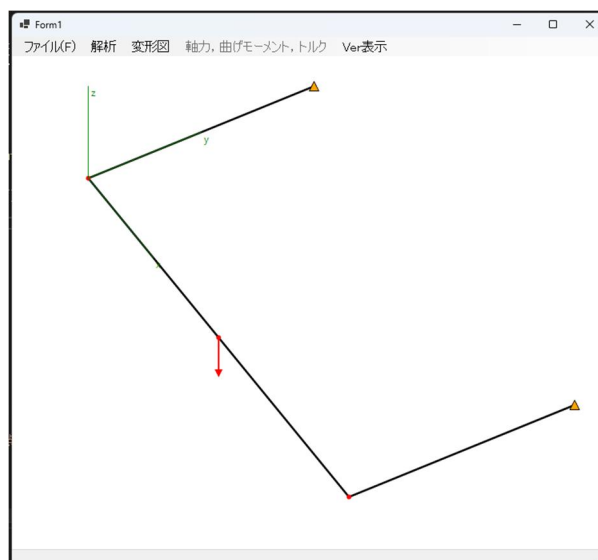


図 13 ファイル読み取り後の画面

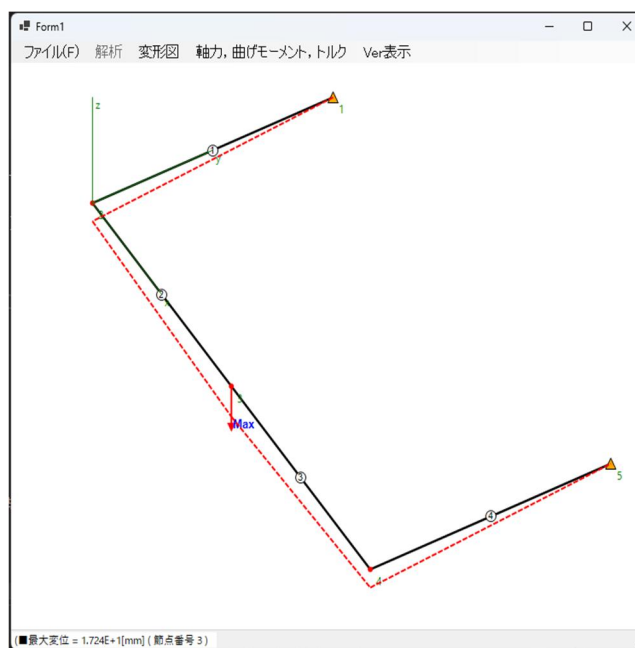


図 14 実行後の変位表示

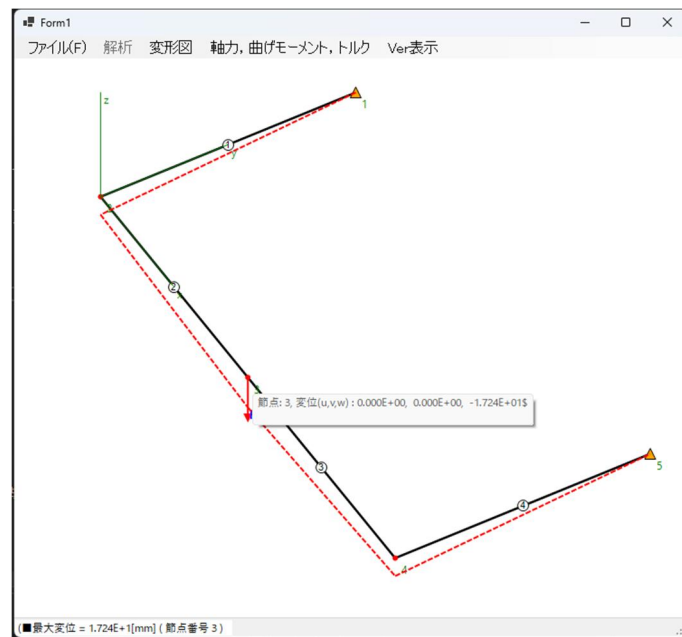
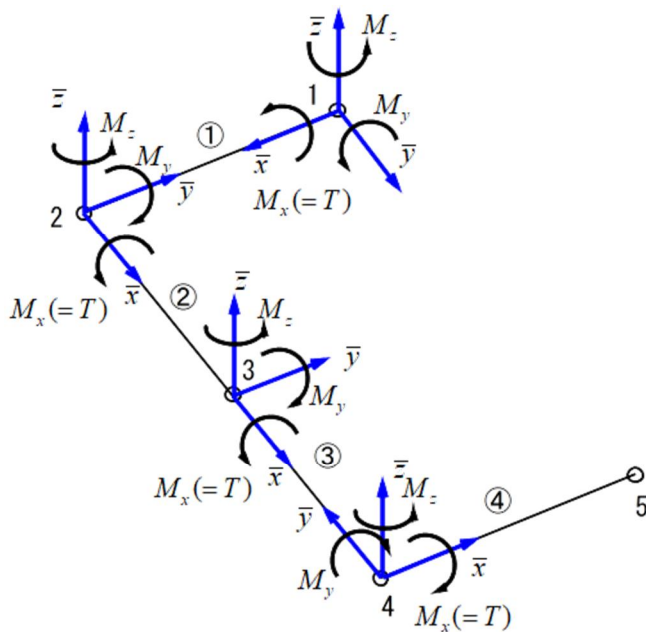
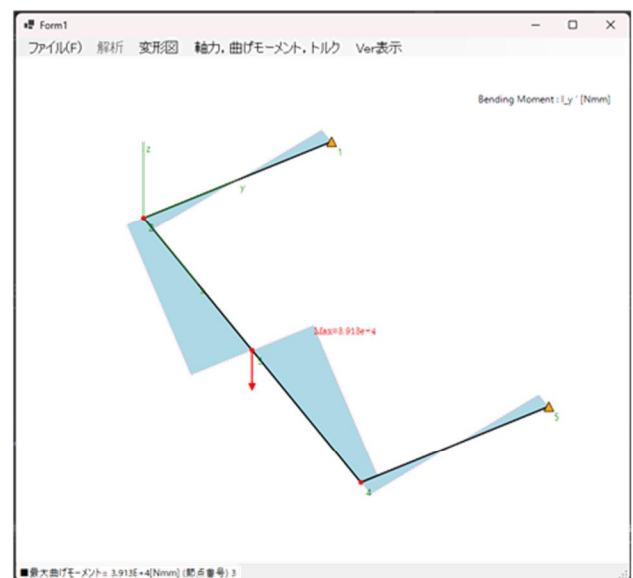


図 15 マウスホバーによる変位表示

図 18(a)には、本問題の部材座標に対応した曲げモーメント，トルクの向きを示している．通常の材料力学の曲げモーメントの符号規約ではなく，右手系からなる部材座標の向きに応じて決定されることに注意して欲しい．また，本来ならば，部材の曲げモーメントなどは $\bar{M}_y$ と記すべきだが，以後は，



(a) モーメントの向き



(b) モーメント $M_y$ の分布

図 16 モーメントの表示

$M_y$ と略記する。(ほかのせん断力, トルク成分も同様)

また, ツールメニューの「軸力, 曲げモーメント, トルク, せん断力」から, 「Moment\_y」を選ぶと, 図 18(b)のような  $y$  軸(部材座標)まわりの曲げモーメント図を得る. この曲げモーメント図は, 部材座標の  $y$  軸まわりに回転したときの右ねじの進む向きに, 立体的に描いている. 図 18(b)より, 節点 3 に最大曲げモーメント  $3.913 \times 10^4 \text{ Nm}$  が生じていることがわかる. ここで,  $M_y$  は図 18(a)からわかるように, 要素 2, 3 を鉛直面内での曲げを生じさせるモーメントである. また, 要素 2 の節点 2 において作用する曲げモーメント  $M_y$  ( $= -1.087 \times 10^4 \text{ Nm}$ ) は, 要素 1 に作用するトルクでもある. なお, 本問題は,  $z$  方向だけに外力が作用しているので,  $z$  軸まわりの曲げは生じない. したがって,  $M_z$  はすべてゼロである.

なお, 変位と同様, 要素中央の近くにマウスホバーすると, その要素のモーメントやトルクの値がポップアップ表示される. 図 19 には, 要素番号 2 の曲げモーメント値(およびトルクの値)がポップアップ表示される様子が示されている.

本問題の荷重点の  $z$  方向のたわみの理論解  $\delta$  は, はり理論によれば

$$\delta = \frac{Pl_2^3}{24EI} \left\{ 4 \left( 1 + \frac{l_1^3}{l_2^3} \right) - \frac{3}{1 + EI l_1 / (GK l_2)} \right\} \quad (2)$$

である. 問題に与えられた数値

$$\begin{aligned} l_1 &= 1000 \text{ mm}, l_2 = 1000 \text{ mm}, d = 20 \text{ mm}, \\ E &= 206 \times 10^3 \text{ N/mm}^2, G = E / (2(1 + \nu)) = 79.23 \times 10^3 \text{ N/mm}^2, \\ I &= \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 20^4}{64} = 7854 \text{ mm}^4, K = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 20^4}{32} = 15708 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

を代入すると

$$\delta = \frac{100 \times 1000^3}{24 \times 206 \times 10^3 \times 7854} \left\{ 4 \left( 1 + 1^3 \right) - \frac{3}{1 + 206 \times 10^3 \times 7854 / (79.23 \times 10^3 \times 15708)} \right\} = 17.243 \text{ mm} \quad (3)$$

と得られる. FEM の結果は, 図 16, 17 から  $\delta = -17.243 \text{ mm}$  (負号は  $z$  軸の下向き) と求められているので, 理論解と完全に一致しており FEM が正しく動作していることがわかる.

また, 荷重点の曲げモーメントの大きさ  $M_{yp}$  の理論解は

$$M_{yp} = \frac{Pl_2}{4} \cdot \frac{1 + 2EI l_1 / (GK l_2)}{1 + EI l_1 / (GK l_2)} \quad (4)$$

である.  $2G(1 + \nu) = E$  の関係および  $l_1 = l_2$  を利用し, 与えられた数値を代入すると,

$$M_{yp} = \frac{Pl_2}{4} \cdot \frac{3 + 2\nu}{2 + \nu} = \frac{100 \times 1000}{4} \times \frac{3 + 2 \times 0.3}{2 + 0.3} = 39130 \text{ Nmm} \quad (5)$$

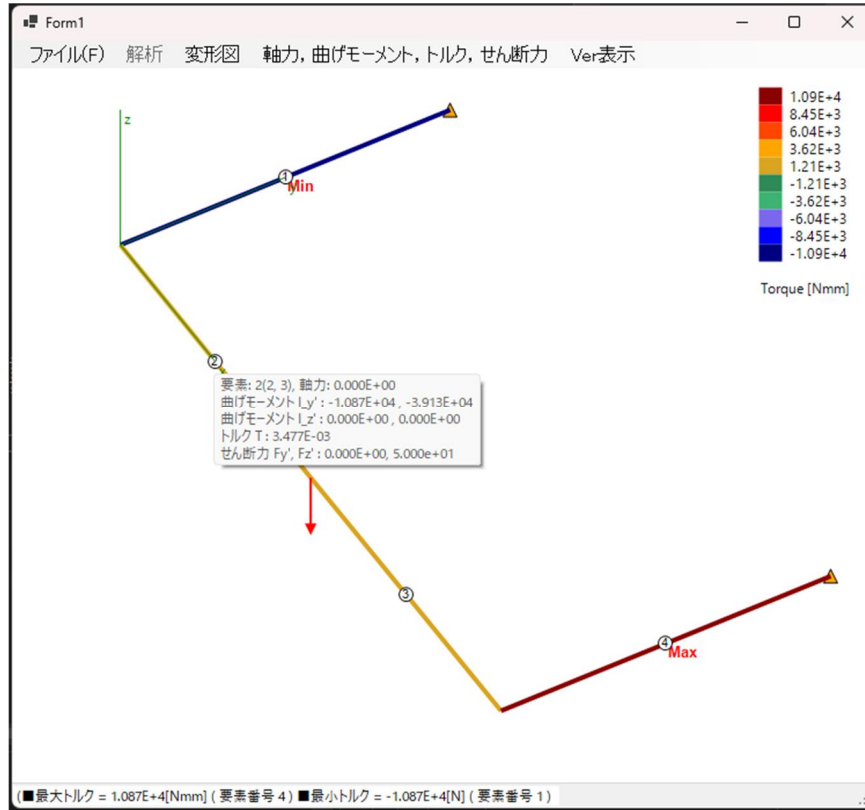


図 19 トルク  $M_x$  の大きさ

を得る。FEM の結果は  $M_{yp} = -39130\text{Nmm}$ （負号は  $y$  軸に関して反時計回り）であるので、理論解と完全に一致していることがわかる。

ツールメニューの「軸力、曲げモーメント、トルク、せん断力」から、「トルク」を選ぶと、図 19 のような  $x$  軸（部材座標）まわりのモーメント、すなわちねじりモーメントの図を得る。ねじりモーメントは図 19 に示すように要素内で一定値をとる。本問題では、負荷荷重  $P$  が鉛直下方に作用しているので要素 2, 3 にはねじり生じないが、ポップアップメニューでは、トルクの値として  $T_2 = 3.477\text{e-}3$ ,  $T_3 = -1.159\text{e-}3$  と微小な値が表示されている。これは、数値計算上の誤差とみなし、ゼロと解釈するとよい。

要素 1 には、節点 2 においてトルク  $T_1$  が作用し、 $T_1 = -1.087\text{e}4$  とポップアップ表示される。これは、材料力学の計算によって求められるトルク（後述の式 (14)）

$$T_1 = -\frac{Pl_2}{4} \cdot \frac{1}{1 + EI l_1 / (GK l_2)} = -\frac{Pl_2}{4} \cdot \frac{1}{2 + \nu} = -\frac{100 \times 1000}{4} \cdot \frac{1}{2 + 0.3} = -10870\text{Nm} \quad (6)$$

と一致している。

ツールメニューの「軸力、曲げモーメント、トルク、せん断力」から、「せん断力  $F_z$ 」を選ぶと、図 20 のような  $z$  軸（部材座標）方向に作用する力、すなわち  $z$  方向のせん断力図を得る。

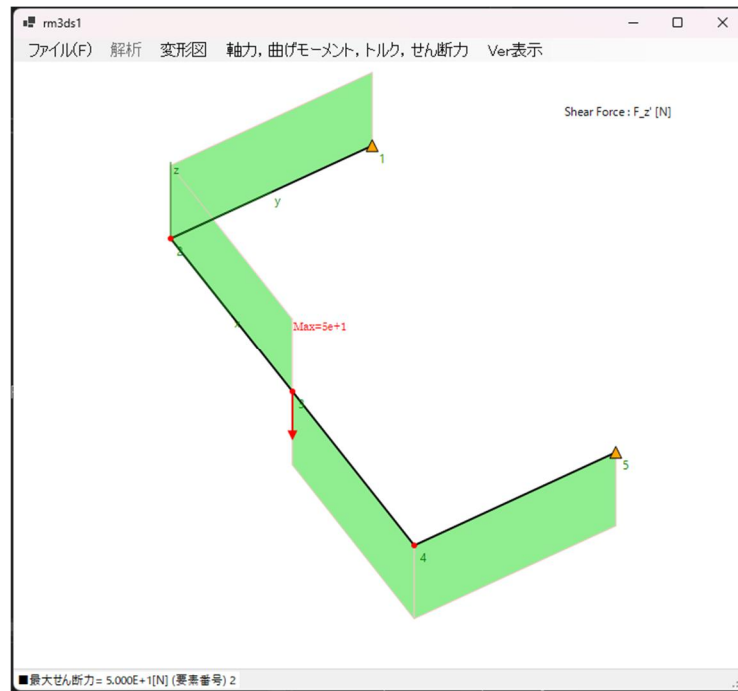


図 20 せん断力図  $F_z$

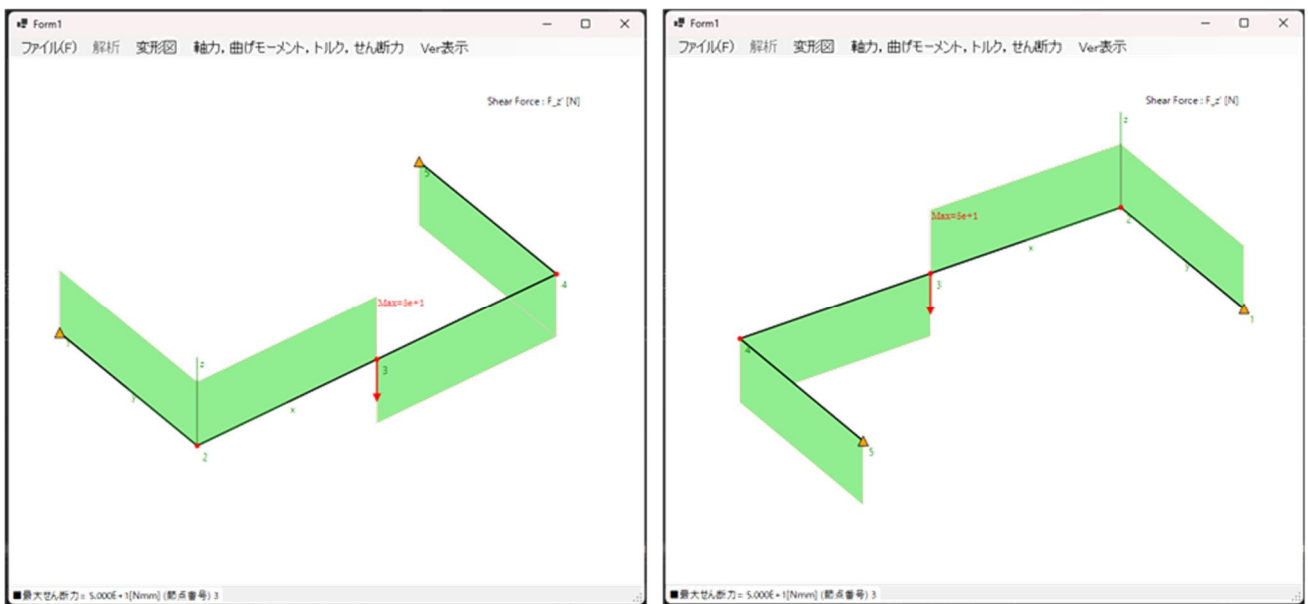


図 21 せん断力図の回転

本プログラムでは、マウスホイールの回転で図形の拡大縮小、マウスの左ボタンのドラッグで移動が自由に行えるようになっている。解析対象を拡大表示して曲げモーメントやせん断力を表示すれば、それらの分布の様子を仔細に把握できる。図 21 は、等測投影された図 20 のせん断力の様子をマウスによる回転や移動を用いての別な角度から表示した図である。



## 2.3 解析結果のテキスト出力

本プログラムでは、実行ファイル rm3ds1.exe の置かれたフォルダーに、解析結果が Rm3d-Results.txt というファイル名で書き込まれる。

本例のそのファイルの内容は以下のようである。

```
*****
*
*                                     *
*      === 立体骨組の有限要素解析 ===      *
*                                     *
*              Ver.1.01 (2025/06)              *
*      == DATE & TIME 2025/06/28 16:40:04 ==      *
*      == Copyright(C) 2025 T. H. ==      *
*                                     *
*****

=== File name ==> C:\Users\user\Dropbox\vb2022\backup\rm3ds1\balcony.dat ===

総節点数   = 5
総要素数   = 4
拘束節点数= 2
荷重節点数= 1

節点      x座標      y座標      z座標
  1   0.0000e+0   1.0000e+3   0.0000e+0
  2   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0
  3   1.0000e+3   0.0000e+0   0.0000e+0
  4   2.0000e+3   0.0000e+0   0.0000e+0
  5   2.0000e+3   1.0000e+3   0.0000e+0

材料番号   ヤング率   ポアゾン比
  1   2.0600e+5   3.0000e-1

要素番号  Node1  Node2      Iy      Iz      断面積      ねじり剛性      材料番号
  1       1      2   7.8540e+3   7.8540e+3   3.1400e+2   1.5708e+4      1
  2       2      3   7.8540e+3   7.8540e+3   3.1400e+2   1.5708e+4      1
  3       3      4   7.8540e+3   7.8540e+3   3.1400e+2   1.5708e+4      1
  4       4      5   7.8540e+3   7.8540e+3   3.1400e+2   1.5708e+4      1
```

```

===== 拘 束 条 件 =====
節点番号  x 拘束  y 拘束  z 拘束  θx 拘束  θy 拘束  θz 拘束
  1         1      1      1      1      1      1
  5         1      1      1      1      1      1

===== 荷 重 条 件 =====
節点番号  x 荷重      y 荷重      z 荷重      トルク  曲げモーメント My  曲げモーメント
Mz
  3      0.0000e+0    0.0000e+0   -1.0000e+2   0.0000e+0   0.0000e+0      0.0000e+0

===== 変      位 =====
節点      u      v      w      thx      thy      thz
  1      0.0000e+0    0.0000e+0    0.0000e+0    0.0000e+0    0.0000e+0    0.0000e+0
  2      0.0000e+0    0.0000e+0   -1.0301e+01   1.5452e-02    8.7337e-03    0.0000e+0
  3      0.0000e+0    0.0000e+0   -1.7243e+01   1.5452e-02    0.0000e+00    0.0000e+0
  4      0.0000e+0    0.0000e+0   -1.0301e+01   1.5452e-02   -8.7337e-03    0.0000e+0
  5      0.0000e+0    0.0000e+0    0.0000e+0    0.0000e+0    0.0000e+00    0.0000e+0

===== 軸力      モーメント      せん断力      トルク =====
要素番号  p      My1      My2      Mz1      Mz2      vx1      vy1      vz1
Torque
  1      0.0000e+0  -1.0870e+4   1.0870e+4   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0
5.0000e+1  -1.0870e+4
  2      0.0000e+0  -1.0870e+4  -3.9130e+4   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0
5.0000e+1   3.4773e-3
  3      0.0000e+0   3.9130e+4   1.0870e+4   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0 -
5.0000e+1  -1.1591e-3
  4      0.0000e+0  -1.0870e+4   1.0870e+4   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0   0.0000e+0
-5.0000e+1   1.0870e+4

*****
2025/06/28 16:40:04
*****

```

出力内容の荷重条件までは、入力データ内容の出力であり、それ以降は、FEM 解析によって得られたすべての節点変位、角変位そして要素ごとの曲げモーメント、トルク、せん断力などの出力である。

出力結果のなかで、たとえば、節点変位について

節点	u	v	w	thx	thy	thz
.....						
3	0.0000e+00	0.0000e+00	<b>-1.7243e+01</b>	1.5452e-02	0.0000e+00	0.0000e+00
.....						

と出力されている部分に関しては、節点3の  $x,y,z$  方向の変位および  $x,y,z$  軸まわりの回転角を表しており (thx:ねじり角, thy,thz:たわみ角), 変位は全体座標, 回転角は局所座標表示である. 入力時での長さの単位は mm であったので, これらの変位の単位は mm であり, 回転角は radian の単位である.

同様に, 要素番号ごとの軸力, モーメント, せん断力, トルクの出力

=====	軸力	モーメント	せん断力	トルク	=====			
要素番号	p	My1	My2	Mz1	Mz2	vx1	vy1	vz1
Torque								
1	0.0000e+0	-1.0870e+4	1.0870e+4	0.0000e+0	0.0000e+0	0.0000e+0	0.0000e+0	5.0000e+1 -
1.0870e+4								
.....								

については, 節点座標の単位が mm, 縦弾性係数を入力したときの単位が (N/mm<sup>2</sup>) であったことに対応して, モーメントとトルクは Nmm の単位となることに留意する. たとえば, 節点1 (第1節点) に生じている曲げモーメント My は, My1 と表示され, My1=-1.0870×10<sup>4</sup>Nmm と読み取ればよい.

曲げ応力を知りたい場合には, FEM 解析によって求められた曲げモーメントを主軸方向の断面係数  $Z_1(=Z_2)$  で割ればよい<sup>6)</sup>. すなわち

$$\sigma_y = \frac{M_y}{Z_1}, \quad \sigma_z = \frac{M_z}{Z_2} \quad (7)$$

となる. 本問題では

$$Z_1 = Z_2 = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi \times 20^3}{32} = 785.4 \text{ mm}^3$$

であるから, 本問題の最大応力は, 節点3に生じる最大曲げモーメント  $M_{\max}$  を  $Z_1$  で割って

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{Z_1} = \frac{39130 \text{ Nm}}{785.4 \text{ mm}^3} = 49.82 \text{ N/mm}^2 \approx 49.8 \text{ MPa} \quad (8)$$

と計算される.

出力されるテキストファイル Rm3D-Results.txt は, FEM 解析の実行の度に同名で書き込まれる. したがって, このファイルを保存したい場合には, 別名でコピーしておくといよい.

## 2.4 例題 1 の理論解の導出

2.2 節で取り上げたコの字型骨組のたわみや曲げモーメントなどについては、理論解を導出できる。参考までに、カスティリアの定理を用いた理論解を以下に示す。

AC 部材の点 C に作用する不静定ねじりモーメント（未知）を  $T_1$  とする。このとき、AC 部材は、点 C に集中荷重  $P/2$  とねじりモーメント  $T_1$  を受ける片持ちはりとなすから、作用モーメント  $M_1$ 、作用トルク  $T_1$  は

$$M_1 = -\frac{P}{2}(l_1 - x_1), \quad T_1 = T_1 (\text{一定値}) \quad (9)$$

となる。したがって、部材 AC のひずみエネルギー  $U_1$  は

$$U_1 = \frac{1}{2EI} \int_0^{l_1} \left\{ -\frac{P}{2}(l_1 - x_1) \right\}^2 dx_1 + \frac{1}{2GK} \int_0^{l_1} T_1^2 dx_1 = \frac{P^2 l_1^3}{24EI} + \frac{T_1^2 l_1}{2GK} \quad (10)$$

ここで、曲げモーメントなどの符号については、(FEM の規約ではなく) 材料力学の規約にしたがうことにする。

部材 CD においては、AC 部材の点 C に作用したねじりモーメント  $T_1$  が曲げモーメントとして作用し、作用モーメント  $M_2$ 、作用トルク  $T_2$  は

$$M_2 = T_1 + \frac{P}{2}x_2, \quad T_2 = 0 \quad (11)$$

となる。したがって、部材 CD のひずみエネルギー  $U_2$  は

$$U_2 = \frac{1}{2EI} \int_0^{l_2} \left( T_1 + \frac{P}{2}x_2 \right)^2 dx_2 = \frac{1}{24EI} \left( T_1^2 l_2 + \frac{PT_1 l_2^2}{2} + \frac{P^2 l_2^3}{12} \right) \quad (12)$$

となる。

以上より、コの字骨組全体のひずみエネルギー  $U$  は

$$U = 2(U_1 + U_2) = T_1^2 \left( \frac{l_1}{GK} + \frac{l_2}{EI} \right) + \frac{PT_1 l_2^2}{2EI} + \frac{P^2}{12EI} (l_1^3 + l_2^3) \quad (13)$$

と得られる。 $U$  は、不静定量に関しては極値をとる（これを、**最小仕事の原理**<sup>7)</sup> という。一般に、不静定問題では、不静定量を含んで全ひずみエネルギーを表し、これを不静定量で偏微分してゼロと置いた式を解けば不静定量が決まる。別な言い方をすれば、このことは、本問題では点 C における要素 1 のねじり角と要素 2 のたわみ角とが等しいことでもある。）から

$$\frac{\partial U}{\partial T_1} = 0 \quad \therefore \quad 2T_1 \left( \frac{l_1}{GK} + \frac{l_2}{EI} \right) + \frac{Pl_2^2}{2EI} = 0 \quad \therefore \quad T_1 = -\frac{Pl_2^2 GK}{4(EIl_1 + GKl_2)} \quad (14)$$

さらに、カスティリアノの定理を利用すれば、荷重点の変位  $\delta$  は

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P}{6EI}(l_1^3 + l_2^3) + \frac{Pl_2^2}{2EI} = \frac{P}{6EI}(l_1^3 + l_2^3) - \frac{l_2^2}{2EI} \cdot \frac{Pl_2^2 GK}{4(EIl_1 + GKl_2)} \\
&= \frac{Pl_2^3}{24EI} \left\{ 4 \left( 1 + \frac{l_1^3}{l_2^3} \right) - \frac{3}{1 + EIl_1/(GKl_2)} \right\}
\end{aligned} \tag{15}$$

と得られる。また、荷重点の曲げモーメント  $M_P$  は、式 (14) を式 (11) に代入し、 $x_2=l_2$  とおけば得られ

$$M_P = \frac{Pl_2}{4} \cdot \frac{2EIl_1 + GKl_2}{EIl_1 + GKl_2} = \frac{Pl_2}{4} \cdot \frac{2 + GKl_2/(EIl_1)}{1 + GKl_2/(EIl_1)} \tag{16}$$

となる。

## 2.5 ほかの解析例

本プログラムによるほかの解析例を以下に示す。

### 【例 1】水平荷重を受ける立方体状骨組

図 22 の立方体状骨組を解析する。各部材はすべて長さ  $l=400$  mm, 直径  $d=8$  mm の丸棒, 材質は軟鋼

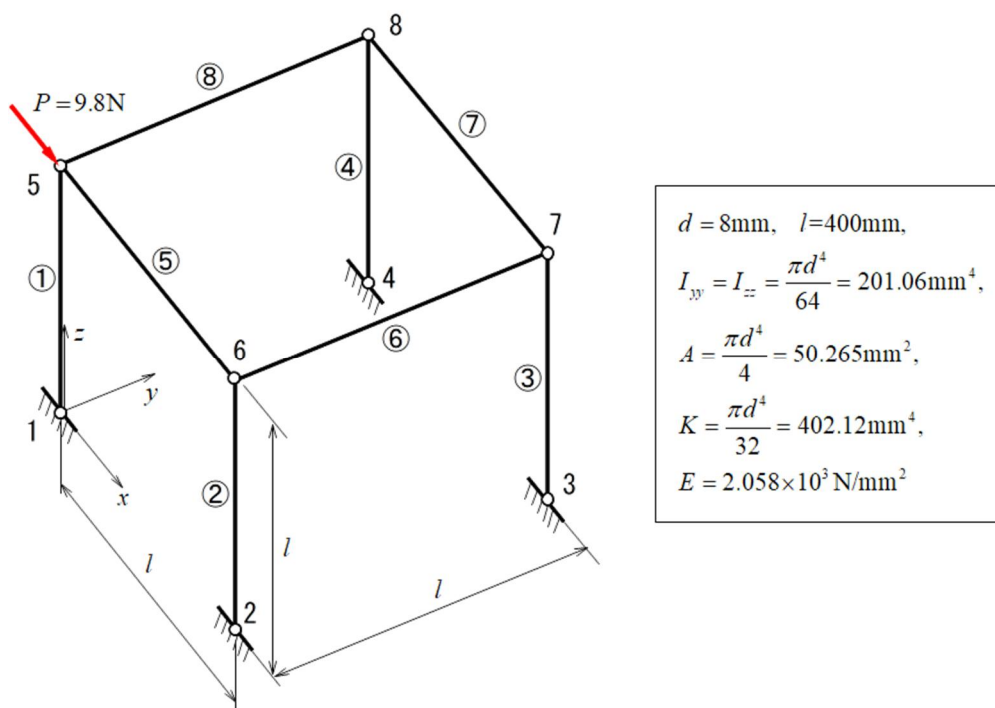


図 22 立方体状骨組

製とし、 $E=2.058 \times 10^3$  N/mm<sup>2</sup>である。

節点番号、要素番号は図 22 のように定める。節点 5 に、 $x$  方向に 9.8 N の荷重を負荷し、水平面上の節点 1, 2, 3, 4 は完全固定とする。この部材の慣性モーメント  $I_y, I_z$ , 断面積  $A$ , ねじり定数  $K$  は図中

に示したとおりである.

これより, 本問題に用意すべきデータは以下のようになる.

```
8, 8, 4, 1, 1, 0
1, 0.0, 0.0, 0.0
2, 400.0, 0.0, 0.0
3, 400.0, 400.0, 0.0
4, 0.0, 400.0, 0.0
5, 0.0, 0.0, 400.0
6, 400.0, 0.0, 400.0
7, 400.0, 400.0, 400.0
8, 0.0, 400.0, 400.0
1, 205.8e3, 0.3
1, 1, 5, 201.06, 201.06, 50.265, 402.12, 1
2, 2, 6, 201.06, 201.06, 50.265, 402.12, 1
3, 3, 7, 201.06, 201.06, 50.265, 402.12, 1
4, 4, 8, 201.06, 201.06, 50.265, 402.12, 1
5, 5, 6, 201.06, 201.06, 50.265, 402.12, 1
6, 6, 7, 201.06, 201.06, 50.265, 402.12, 1
7, 7, 8, 201.06, 201.06, 50.265, 402.12, 1
8, 8, 5, 201.06, 201.06, 50.265, 402.12, 1
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
2, 1, 1, 1, 1, 1, 1
3, 1, 1, 1, 1, 1, 1
4, 1, 1, 1, 1, 1, 1
5, 9.8, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0
```

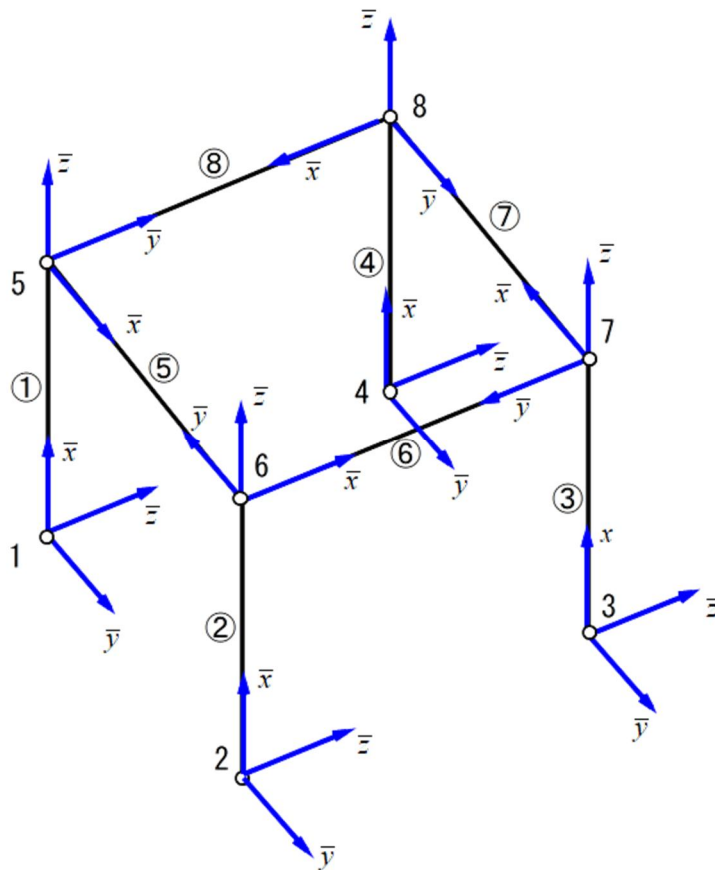


図 18 立方体状骨組の局所座標系

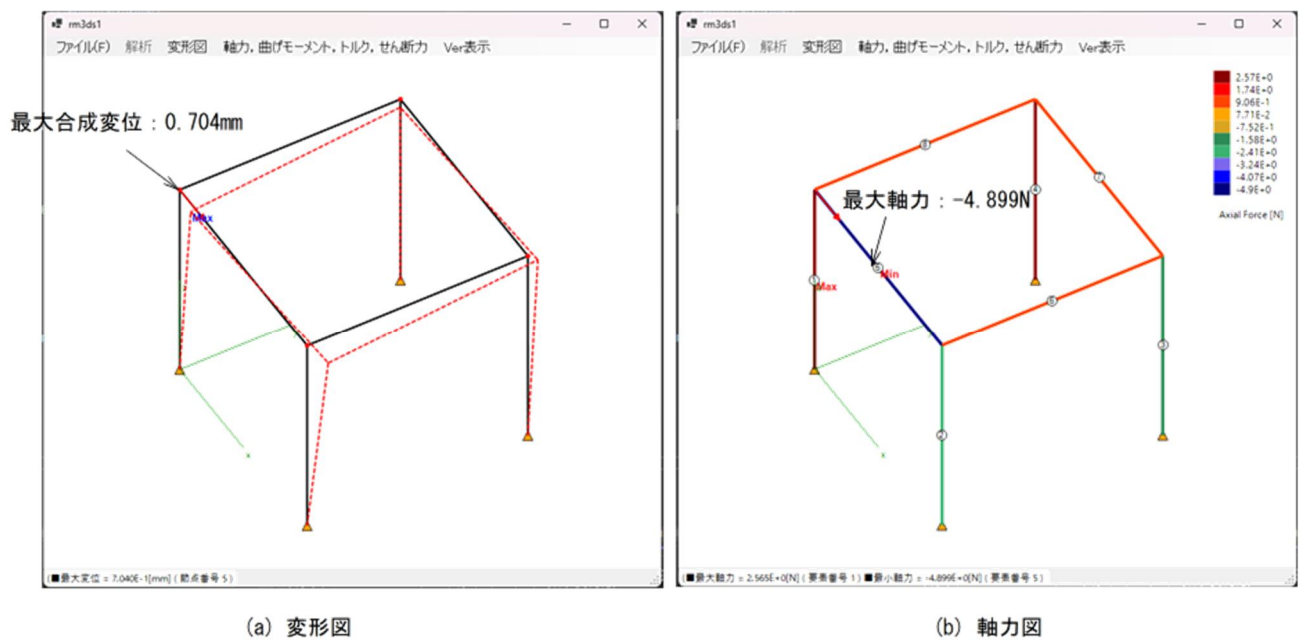


図 17 立方体状骨組解析結果（変形図と軸力）

図 23 には、本問題の各要素の局所座標系を示している。これによって、主軸の向きを考えればよい。

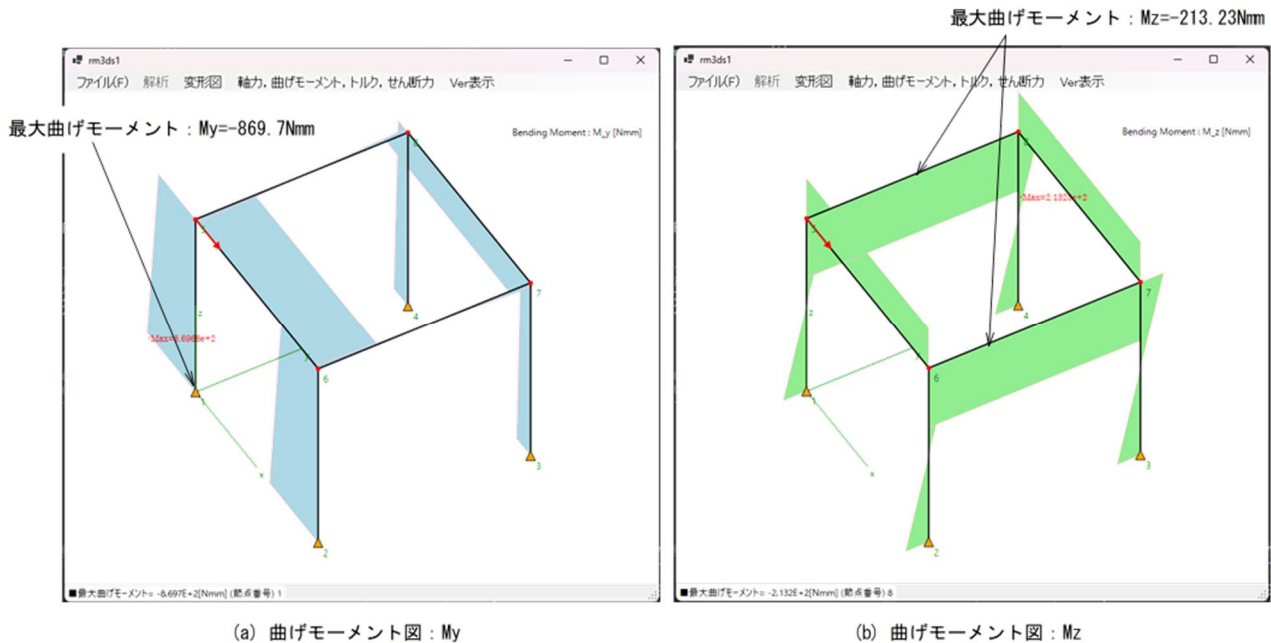


図 19 立方体状骨組の解析結果（曲げモーメント  $M_y, M_z$ ）

本問題の解析結果を図 24,25,26,27 に示す。

図 24(a)は、変形図であり、節点 5、すなわち荷重を負荷した節点で最大合成変位  $0.704 \text{ mm}$  ( $u=0.693, v=-0.1259, w=9.971\text{e-}5$ ) を生じる。図 24(b)は、各要素の生じる軸力の大きさを表し、（絶対値が）最大の軸力は要素 5 に生じ、その大きさは  $-4.899 \text{ N}$ 、すなわち負荷荷重  $9.8 \text{ N}$  の  $1/2$  の大きさとなっていることがわかる。

図 25(a)は、部材座標系における曲げモーメント  $M_y$  の大きさを要素ごとに 3 次元的に表示した図であり、要素 1 に最大曲げモーメント  $869.7 \text{ Nmm}$  が生じていることがわかる。要素 1 は、負荷荷重を直接受け止める要素であるから、この要素の固定部が最大となるのは常識的に予想できる結果でもある。また、 $9.8 \text{ N} \times 400 \text{ mm}$  の曲げモーメントを 4 本の片持ちはりで支えると考えたときの曲げモーメント ( $=9.8 \times 400/4 = 980 \text{ Nmm}$ ) よりも若干低い値になっている。図 25(b)は、部材座標系における曲げモーメント  $M_z$  の大きさを示した図であり、要素 6 と要素 8 に一様な曲げが生じている。しかし、その値は  $M_y$  の最大値の  $1/4$  ほどの大きさである。

図 26 は各要素に生じるトルク、図 27 は各要素に生じるせん断応力を示した図である。



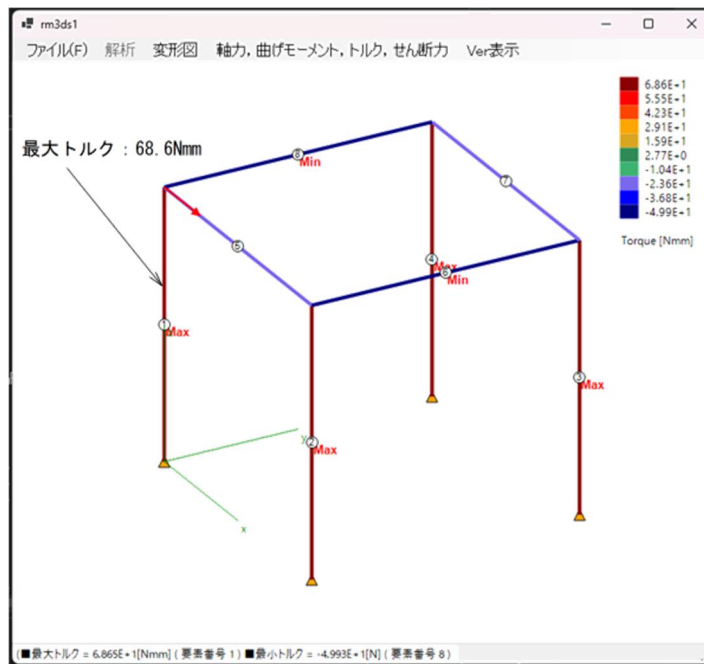
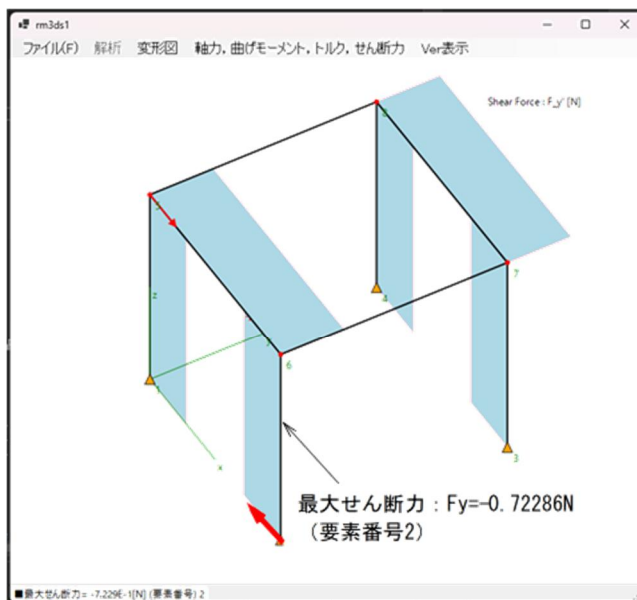
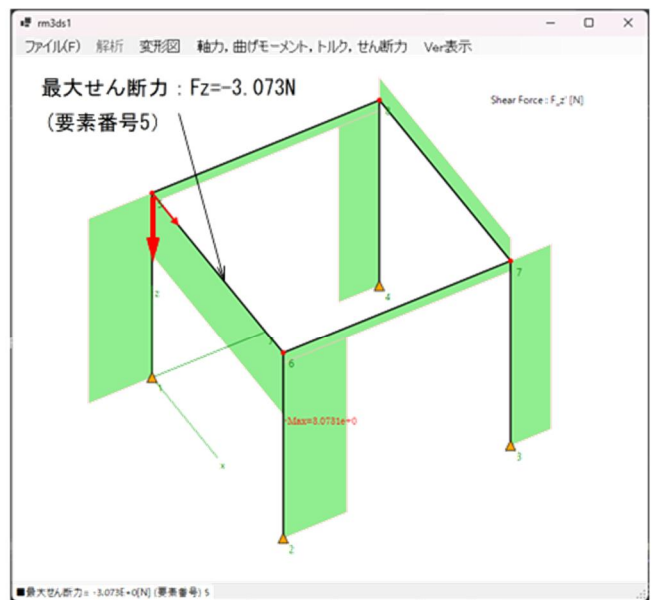


図 20 立方体状骨組の解析結果（トルク  $M_x$ ）



(a) せん断力図 :  $F_y$



(b) せん断力図 :  $F_z$

図 21 立方体状骨組の解析結果（せん断力図  $F_y, F_z$ ）

以上の結果を、参考文献 3) (藤谷著) の結果と比較したのが以下の表である。

項 目	本結果	藤谷
最大たわみ (mm)	0.704	0.703
最大曲げモーメント $M_y$ (Nmm)	-869.7	-869.5
最大曲げモーメント $M_z$ (Nmm)	-213.23	-213.15
最大トルク $M_x$ (Nmm)	68.6	68.6
最大せん断力 $F_y$ (N)	-0.72286	-0.72269
最大せん断力 $F_z$ (N)	-3.073	不明

両者ともほぼ一致しており、本プログラムによる結果の正しさを裏付けることができる。

### 【例 2】2 層骨組

図 27 の 2 層の骨組を解析する。各部材はすべて長さ  $l=1000$  mm,  $b=h=30$  mm の角鋼，材質は軟鋼製と

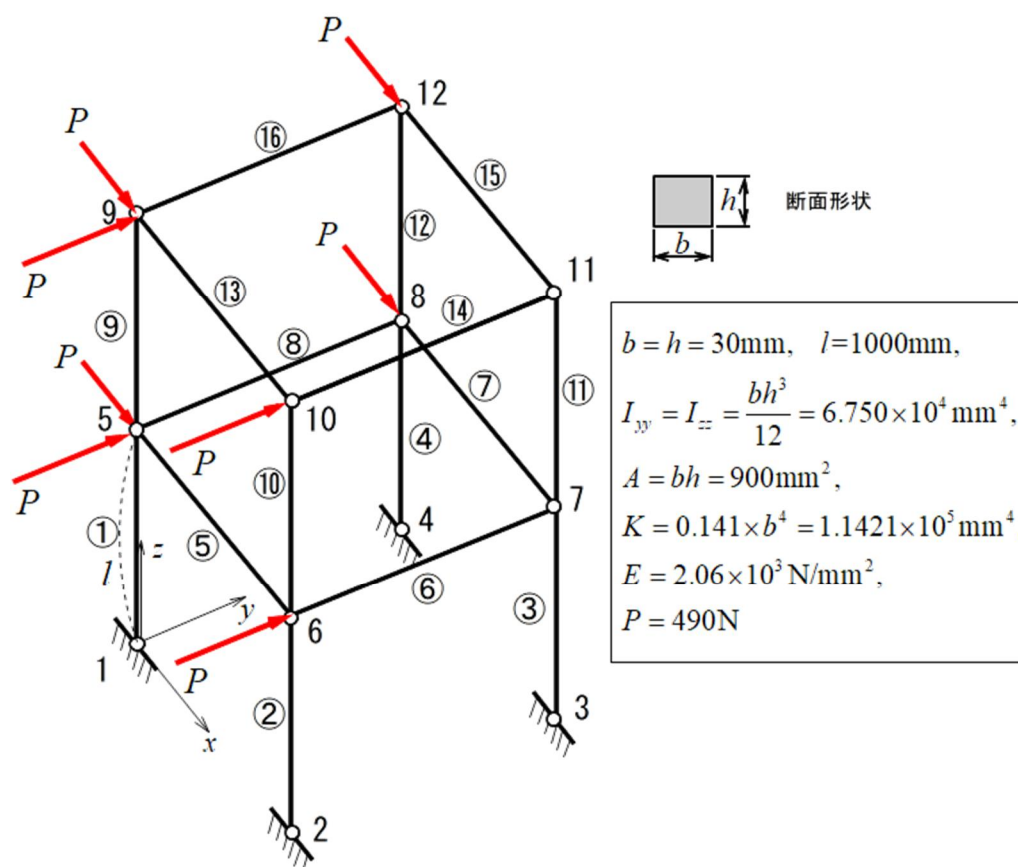


図 28 2 方向荷重を受ける 2 層骨組

し、 $E=2.06 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ である。

節点番号、要素番号は図 28 のように定める。節点 5,8,9,12 に  $x$  方向に  $P=490 \text{ N}$  の荷重を、そして節点 5,6,9,10 に  $y$  方向に  $P=490 \text{ N}$  の荷重を負荷する。水平面上の節点 1, 2, 3, 4 は完全固定とする。

この部材の慣性モーメント  $I_y, I_z$ , 断面積  $A$ , ねじり定数  $K$  は図中に示したとおりである。

これより、本問題に用意すべきデータは以下のようになる。

```
12, 16, 4, 6, 1, 0
1, 0.0, 0.0, 0.0
2, 1000.0, 0.0, 0.0
3, 1000.0, 1000.0, 0.0
4, 0.0, 1000.0, 0.0
5, 0.0, 0.0, 1000.0
6, 1000.0, 0.0, 1000.0
7, 1000.0, 1000.0, 1000.0
8, 0.0, 1000.0, 1000.0
9, 0.0, 0.0, 2000.0
10, 1000.0, 0.0, 2000.0
11, 1000.0, 1000.0, 2000.0
12, 0.0, 1000.0, 2000.0
1, 206.0e3, 0.3
1, 1, 5, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
2, 2, 6, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
3, 3, 7, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
4, 4, 8, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
5, 5, 6, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
6, 6, 7, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
7, 7, 8, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
8, 5, 8, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
9, 5, 9, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
10, 6,10, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
11, 7,11, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
12, 8,12, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
13, 9,10, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
```

```

14,10,11, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
15,11,12, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1
16, 9,12, 6.75e4, 6.75e4, 900.0, 1.1421e5, 1

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1
2, 1, 1, 1, 1, 1, 1
3, 1, 1, 1, 1, 1, 1
4, 1, 1, 1, 1, 1, 1

5, 490.0, 490.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0
6,  0.0, 490.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0
8, 490.0,  0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0
9, 490.0, 490.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0
10,  0.0, 490.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0
12, 490.0,  0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0

```

図 29 に変形図と軸力図, 図 30 曲げモーメント  $I_y, I_z$  の図を示す.

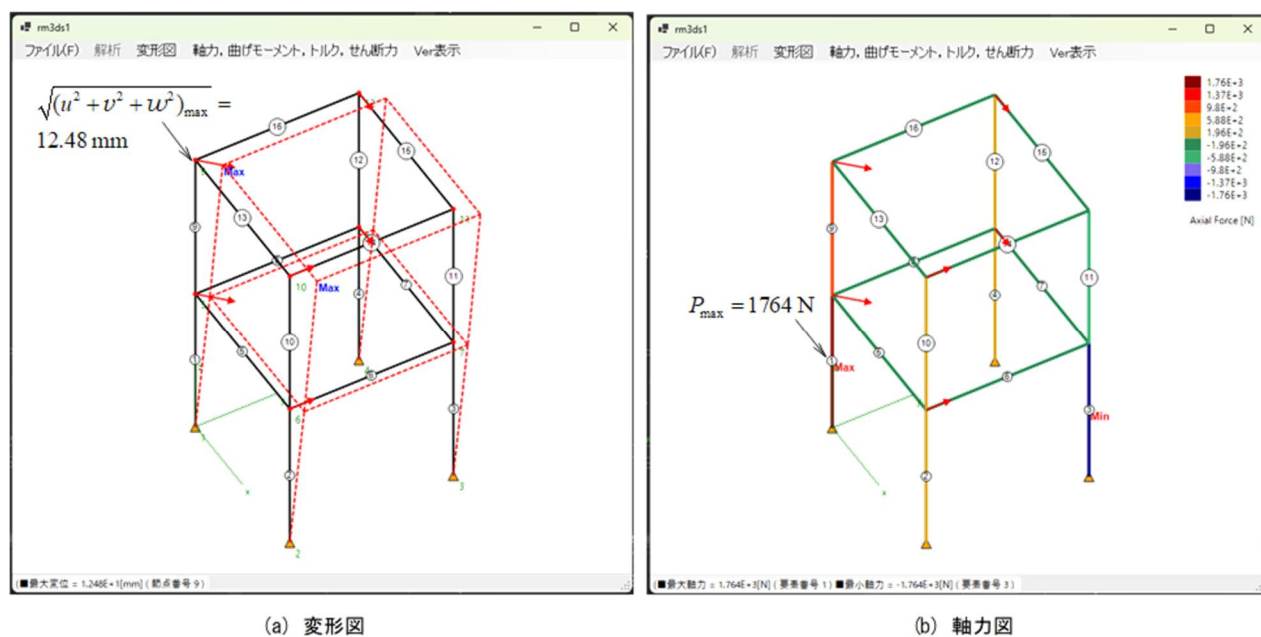


図 22 2層骨組の解析結果 (変形図と軸力)

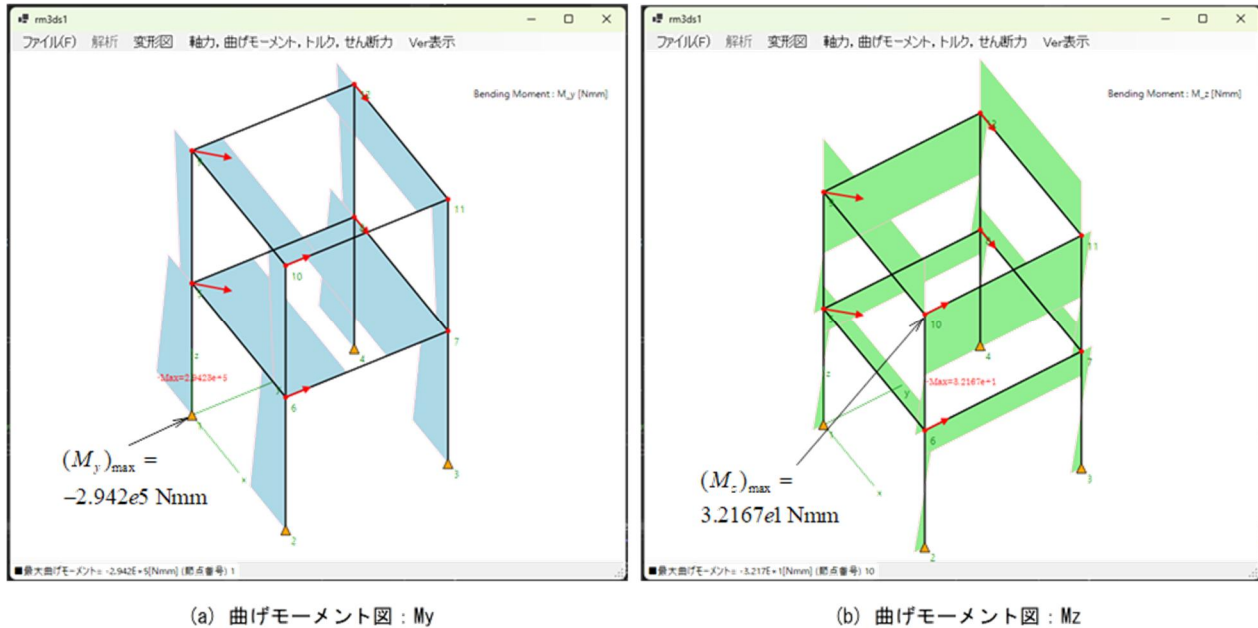


図 30 2 層骨組の解析結果（曲げモーメント  $M_y$ ,  $M_z$ ）

## 2.7 利用上の注意，著作権ほか

本プログラムは，基本的には，FEM の教育用に開発したものであり，一般的な実務での利用は意図していない．このため，演習の目的以外の利用での結果については保証できない．

また，本プログラムは自由に利用できるが，著作権は著者にあり無断複製や第三者への無断配布などは控えていただきたい．

本プログラムには，まだ，バグや操作法の不具合などが潜んでいることが予想される．その場合には，以下へご連絡いただけるとありがたい（連絡先：tadashihoribe@gmail.com）．

## 2.8 参考文献

- 1) 堀辺忠志，Visual Basic でわかるやさしい有限要素法の基礎，森北出版（2008）．
- 2) 戸川隼人，有限要素法概論，培風館（1981）．
- 3) 藤谷義信，パソコンで解く骨組の力学，丸善（1994）．
- 4) 中原ほか 5 名，弾性学ハンドブック，朝倉書店（2002）．
- 5) 戸川隼人，マイコンによる有限要素解析（続），培風館（1983）．
- 6) 堀辺忠志，例題で学ぶ材料力学，森北出版（2022）．
- 7) 中原一郎，材料力学上巻，養賢堂（1977）．